運動量・一般座標

一般座標 q_α に対応する(一般)運動量

$$p_\alpha \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}.$$

例 (一粒子、三次元 Cartesian座標)

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z, t).$$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}.$$

……従来の運動量

例 (一粒子、二次元極座標)

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r, \theta, t).$$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r},$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \quad \text{……角運動量.}$$

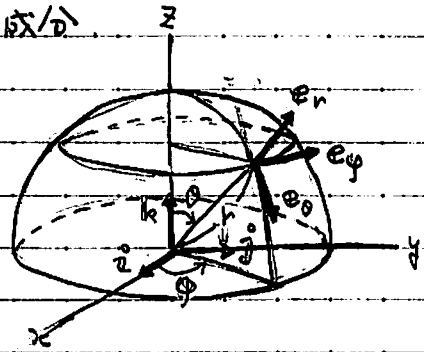
例 (一粒子、三次元球座標)

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta) - U(r, \theta, \varphi, t),$$

$p_r = m\dot{r}$,

$p_\theta = mr^2\dot{\theta}$ … 角運動量の φ 成分

$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}\sin^2\theta$ … 角運動量の z 成分



* $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

$= r\sin\theta\cos\varphi\,\mathbf{i} + r\sin\theta\sin\varphi\,\mathbf{j} + r\cos\theta\,\mathbf{k}$

$(\mathbf{i} = (1, 0, 0),\ \mathbf{j} = (0, 1, 0),\ \mathbf{k} = (0, 0, 1))$

r, θ, φ 方向の単位ベクトル

$$\mathbf{e}_r = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \Big/ \left\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}\right\|, \quad \mathbf{e}_\theta = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \Big/ \left\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right\|, \quad \mathbf{e}_\varphi = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \Big/ \left\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}\right\|.$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \sin\theta\cos\varphi\,\mathbf{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\mathbf{j} + \cos\theta\,\mathbf{k}, \quad \left\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}\right\| = 1,$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = r\cos\theta\cos\varphi\,\mathbf{i} + r\cos\theta\sin\varphi\,\mathbf{j} - r\sin\theta\,\mathbf{k}, \quad \left\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right\| = r,$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = -r\sin\theta\sin\varphi\,\mathbf{i} + r\sin\theta\cos\varphi\,\mathbf{j}, \quad \left\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}\right\| = r\sin\theta,$$

$$\therefore\quad \mathbf{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\mathbf{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\mathbf{j} + \cos\theta\,\mathbf{k},$$
$$\mathbf{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\mathbf{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\mathbf{j} - \sin\theta\,\mathbf{k},$$
$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\mathbf{i} + \cos\varphi\,\mathbf{j}$$

($\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi\}$ …右手系の正規直交基底)

ベクトル $\mathbf{a}$ の r成分 $a_r = \mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_r$, θ成分 $a_\theta = \mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_\theta$, φ成分 $a_\varphi = \mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_\varphi$.

角運動量 $\mathbf{l} = \mathbf{r}\times\mathbf{p} = m\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}$ $\quad (\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}})$.

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r, \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r,$$

$$\dot{\mathbf{e}}_r = (\dot\theta\cos\theta\cos\varphi - \dot\varphi\sin\theta\sin\varphi)\,\mathbf{i} + (\dot\theta\cos\theta\sin\varphi + \dot\varphi\sin\theta\cos\varphi)\,\mathbf{j} - \dot\theta\sin\theta\,\mathbf{k}$$
$$= \dot\theta(\cos\theta\cos\varphi\,\mathbf{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\mathbf{j} - \sin\theta\,\mathbf{k}) + \dot\varphi\sin\theta(-\sin\varphi\,\mathbf{i} + \cos\varphi\,\mathbf{j})$$
$$= \dot\theta\,\mathbf{e}_\theta + \dot\varphi\sin\theta\,\mathbf{e}_\varphi,$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r(\dot\theta\,\mathbf{e}_\theta + \dot\varphi\sin\theta\,\mathbf{e}_\varphi),$$

$$\mathbf{l} = m\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}} = mr\mathbf{e}_r \times r(\dot\theta\,\mathbf{e}_\theta + \dot\varphi\sin\theta\,\mathbf{e}_\varphi)$$
$$= mr^2(-\dot\varphi\sin\theta\,\mathbf{e}_\theta + \dot\theta\,\mathbf{e}_\varphi)$$

$\mathbf{l}$ の φ成分: $l_\varphi = \mathbf{l}\cdot\mathbf{e}_\varphi = mr^2\dot\theta = p_\theta$.

$\mathbf{l}$ の z成分: $l_z = \mathbf{l}\cdot\mathbf{k} = mr^2(-\dot\varphi\sin\theta\,\mathbf{e}_\theta\cdot\mathbf{k} + \dot\theta\,\mathbf{e}_\varphi\cdot\mathbf{k})$,

$\mathbf{e}_\theta\cdot\mathbf{k} = -\sin\theta$, $\quad \mathbf{e}_\varphi\cdot\mathbf{k} = 0$ より

$$l_z = mr^2\dot\varphi\sin^2\theta = p_\varphi \qquad \square$$

q_α は循環座標である

$\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ Lagrangian L は q_α を陽に含まない : $\dfrac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$.

q_α が循環座標ならば、Lagrange 運動方程式より

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \frac{dp_\alpha}{dt}, \quad \therefore\ p_\alpha = \mathrm{const}.$$

〈運動量保存則〉 循環座標に対応する運動量は保存される。

例（1粒子、3次元 Cartesian 座標）

外力が存在していない場合、L は x, y, z を陽に含まない。

$$p_x = m\dot{x} = \mathrm{const}, \quad p_y = m\dot{y} = \mathrm{const}, \quad p_z = m\dot{z} = \mathrm{const}.$$

$$\boldsymbol{p} = (p_x, p_y, p_z) = \mathrm{const}.$$

… 従来の運動量保存則

例（1粒子、2次元極座標）

中心力による運動の場合、L は θ を陽に含まない。

$$p_\theta = mr^2\dot{\theta} = \mathrm{const}.$$

… 角運動量保存則

解析力学ではひとつの法則（運動量保存則）に統合される。

例（1粒子、3次元球座標）

中心力による運動の場合、L は φ を陽に含まない。

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}\sin\theta = \mathrm{const}.$$

… 角運動量の z 成分が保存則

（角運動量そのものの保存則までは得られない。
↓
Noether の定理）

Noether の定理

(ネーター)

一般座標の変換 : $q_\alpha(t) \to q_\alpha(t, \sigma)$ $(\alpha = 1, \cdots, f)$ ——①

($q_\alpha(t, \sigma = 0) = q_\alpha(t)$ とする)

Lagrangian L が上の座標変換で不変ならば、それに対応して保存量が存在する。

Noether の定理

Lagrangian L が座標変換①で不変、すなわち、

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} L(t, q(t, \sigma), \dot{q}(t, \sigma)) = 0$$

ならば、

$$Q \equiv \sum_{\alpha=1}^{f} \frac{\partial L(t, q(t, \sigma), \dot{q}(t, \sigma))}{\partial \dot{q}_\alpha} \left. \frac{\partial q_\alpha(t, \sigma)}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=0}$$

は保存される。 □

Q … Noether charge とよぶ。

(証明) $q(t, \sigma) \to q(\sigma)$ と略記する。

$$0 = \frac{\partial}{\partial \sigma} L(t, q(\sigma), \dot{q}(\sigma)) = \sum_{\alpha=1}^{f} \left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial \sigma} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial \sigma} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{f} \left\{ \frac{\partial q_\alpha}{\partial \sigma} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial \sigma} \right) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right\} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{\alpha=1}^{f} \frac{\partial q_\alpha}{\partial \sigma} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right),$$

$$\therefore \sum_{\alpha=1}^{f} \frac{\partial q_\alpha}{\partial \sigma} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \text{const.}$$

$\sigma = 0$ とおけば、Noether の定理を得る。 ⊠

q_β が循環座標ならば

$$q_\alpha(t, \sigma) \equiv \begin{cases} q_\beta(t) + \sigma & (\alpha = \beta) \\ q_\alpha(t) & (\alpha \neq \beta) \end{cases}$$

とおくと、

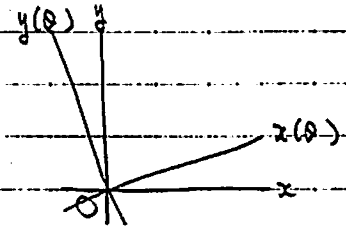
$$Q = \sum_{\alpha=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \underbrace{\frac{\partial q_\alpha}{\partial \sigma}}_{\delta_{\alpha\beta}} = p_\beta .$$

$\therefore$ $p_\beta = \text{const.}$ … 運動量保存則は Noether の定理に含まれる。

<N粒子系、3次元球座標、中心力による運動>

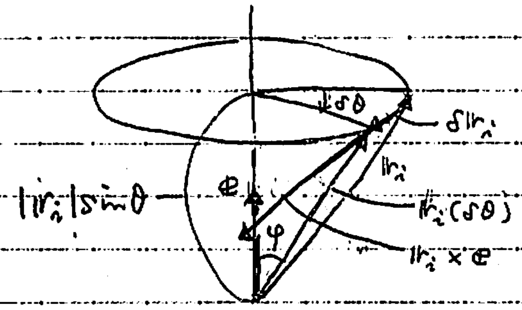
$\mathbf{e}$: 任意の一定の単位ベクトル.

座標系を $\mathbf{e}$ まわりに角度 θ 回転する : $\mathbf{r}_i \mapsto \mathbf{r}_i(\theta)$



$\mathbf{e} = \mathbf{k}$ (z方向の単位ベクトル) の場合.

$\theta \to \delta\theta\ (\approx 0)$ とする.



$\left(\begin{array}{l} \mathbf{e} = \mathbf{k} \text{ の場合なら} \\ \begin{cases} x(\theta) = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y(\theta) = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases} \end{array} \right)$

$$\left.\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \theta}\right|_\theta \fallingdotseq \frac{\delta \mathbf{r}_i}{\delta\theta} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{e}$$

$$Q = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i \cdot (\mathbf{r}_i \times \mathbf{e})$$ ($\mathbf{p}_i = m\dot{\mathbf{r}}_i$ 初等力学における運動量)

$$= -\sum_{i=1}^{N} \mathbf{e} \cdot (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i)$$

$$= -\mathbf{e} \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{l}_i \right)$$ ($\mathbf{l}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$: 初等力学における角運動量)

$= \text{const.}$

* $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

$\mathbf{e}$ は任意なので、

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{l}_i = \text{const.}$$ 角運動量保存則

□