2.3 Hamilton形式

<Legendre変換>

定義 $f(x)$: 凸関数 $\quad \left(\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2) \geq f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) \quad (0<\lambda<1)\right)$

f の Legendre変換

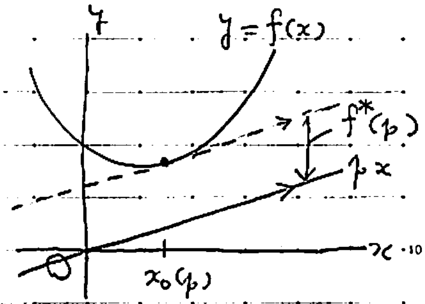
$$f^*(p) \equiv \sup_x \{px - f(x)\}.$$

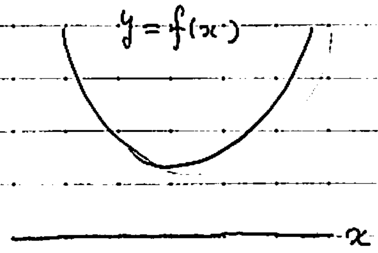
…… 教科書と符号が違う。 □

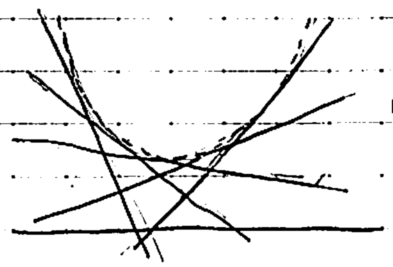
f が微分可能ならば、

p に対し $f'(x)=p$ なる x を $x_0(p)$ とおくと、

$$f^*(p) = p\,x_0(p) - f(x_0(p)).$$







直線群 $y = px - f^*(p)$

$\downarrow$

包絡線 : $y = f(x)$ □

解析力学の話に戻る

Hamilton関数 または Hamiltonian

$$H(t,q,p) = H(t,q_1,\dots,q_f,p_1,\dots,p_f)$$

$$\equiv \sum_{\alpha=1}^{f} p_\alpha \dot{q}_\alpha(t,q,p) - L(t,q,\dot{q}(t,q,p)).$$

… $L(t,q,\dot{q})$ の $\dot{q}_\alpha \ (\alpha=1,\dots,f)$ に関する Legendre変換.

$$dH = \sum_{\alpha=1}^{f} p_\alpha d\dot{q}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{f} \dot{q}_\alpha dp_\alpha - \left(\frac{\partial L}{\partial t}dt + \sum_{\alpha=1}^{f} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}}_{=\dot{p}_\alpha} dq_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{f} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}}_{=p_\alpha} d\dot{q}_\alpha\right)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{f} \dot{q}_\alpha dp_\alpha - \sum \dot{p}_\alpha dq_\alpha - \frac{\partial L}{\partial t}dt. \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) = \dot{p}_\alpha$$

これと、

$$dH = \sum_{\alpha=1}^{f} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}dp_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{f} \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}dq_\alpha + \frac{\partial H}{\partial t}dt$$

とを比較して、

〈Hamiltonの正準方程式〉

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \cdots, f).$$

…Hamilton形式における運動方程式

(前節：Lがtを陽に含まない場合，

$$\sum_{\alpha=1}^{f} \dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - L$$

はエネルギーであり，保存される．)

Hがtを陽に含まないとき，Hはエネルギーであり，$q_\alpha(t)$, $p_\alpha(t)$がHamiltonの正準方程式の解であるとき，$H(q(t), p(t))$は保存される．

$$\left(\because \frac{dH}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{f}\left(\dot{q}_\alpha \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} + \dot{p}_\alpha \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\right) = \sum_{\alpha=1}^{f}\left(\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\right) = 0. \quad \boxtimes\right)$$

例　1粒子の3次元運動，Cartesian座標

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(t, x, y, z).$$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z},$$

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m}, \quad \dot{y} = \frac{p_y}{m}, \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m},$$

$$H = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} - L$$

$$= p_x \cdot \frac{p_x}{m} + p_y \cdot \frac{p_y}{m} + p_z \cdot \frac{p_z}{m} - \left\{\frac{m}{2}\left[\left(\frac{p_x}{m}\right)^2 + \left(\frac{p_y}{m}\right)^2 + \left(\frac{p_z}{m}\right)^2\right] - U\right\},$$

$$\therefore H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(t, x, y, z) = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + U(t, \boldsymbol{r}).$$

例　1粒子の2次元運動，極座標

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(t; r, \theta),$$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta},$$

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2},$$

$$H = p_r \cdot \frac{p_r}{m} + p_\theta \cdot \frac{p_\theta}{mr^2} - \left\{ \frac{m}{2}\left[\left(\frac{p_r}{m}\right)^2 + r^2\left(\frac{p_\theta}{mr^2}\right)^2\right] - U \right\},$$

$$\therefore \quad H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - U(t, r, \theta).$$

□

<u>例</u>　1粒子の3次元運動，球座標，

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta) - U(t, r, \theta, \varphi),$$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}\sin^2\theta,$$

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}, \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\theta}$$

$$H = p_r \cdot \frac{p_r}{m} + p_\theta \cdot \frac{p_\theta}{mr^2} + p_\varphi \cdot \frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\theta}$$

$$- \left\{ \frac{m}{2}\left[\left(\frac{p_r}{m}\right)^2 + r^2\left(\frac{p_\theta}{mr^2}\right)^2 + r^2\sin^2\theta\left(\frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\theta}\right)^2\right] - U \right\},$$

$$\therefore \quad H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2\sin^2\theta} + U(t, r, \theta, \varphi).$$

とくに，粒子が中心力を受けて運動する場合 $(U = U(r))$，
前回の授業より

$$\boldsymbol{l} = mr^2(-\dot{\varphi}\sin\theta\, \boldsymbol{e}_\theta + \dot{\theta}\,\boldsymbol{e}_\varphi).$$

上記より

$$\boldsymbol{l} = -mr^2\sin\theta \cdot \frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\theta}\boldsymbol{e}_\theta + mr^2 \cdot \frac{p_\theta}{mr^2}\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$= -\frac{p_\varphi}{\sin\theta}\boldsymbol{e}_\theta + p_\theta\boldsymbol{e}_\varphi,$$

$$l^2 = |\boldsymbol{l}|^2 = p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}.$$

$$\frac{dl^2}{dt} = 2p_\theta\frac{dp_\theta}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}\right)$$

$$= 2p_\theta\frac{dp_\theta}{dt} + \frac{d\theta}{dt}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}\right) \quad (\text{注: } p_\varphi = \text{const.}).$$

正準方程式より

$$\frac{dp_\theta}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\frac{1}{2mr^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}\right),\quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$$

であるから、

$$\frac{dl^2}{dt} = -2p_\theta\cdot\frac{1}{2mr^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}\right) + \frac{d\theta}{dt}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}\right)$$

$$= -\frac{p_\theta}{mr^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}\right) + \frac{p_\theta}{mr^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}\right) = 0,$$

$\therefore\ l^2 = \mathrm{const}.$

角運動量の大きさ $l = |\boldsymbol{l}|$ は保存される。 □

<u>位相空間</u>（phase space）

… $(q_1, \cdots, q_f, p_1, \cdots, p_f)$ を座標にもつ $2f$ 次元空間。

* 数学でいう位相空間（topological space）とは全く別物である。

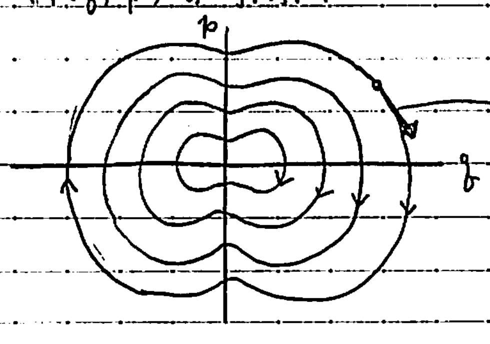
<位相空間内の運動>

Hamiltonian H は t に陽に依存しないとする。

（説明を簡単にするため）$f=1$ とする。

$$H = H(q, p) = H(q_1, p_1).$$

$H(q,p)$ の等高線



正準方程式より

$$\left(\frac{dq}{dt}, \frac{dp}{dt}\right) = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q}\right)$$

… $H(q,p)$ の等高線の接線方向

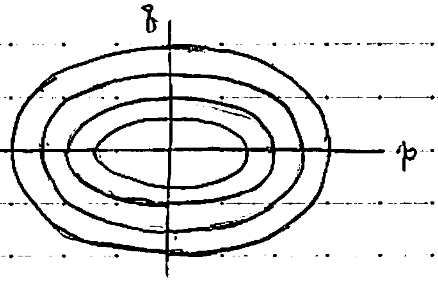
↓

$H(q,p)$ の等高線に沿って系は運動する。

例 1次元調和振動子

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2$$

$H(q, p)$ の等高線は楕円である。



Hamilton 正準方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = \dfrac{p}{m}, & \text{—①} \\ \dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2 q & \text{—②} \end{cases}$$

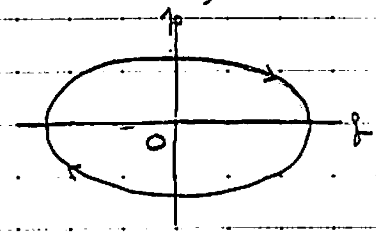
$$\frac{d^2 q}{dt^2} \overset{①}{=} \frac{d}{dt}\left(\frac{p}{m}\right) \overset{②}{=} \frac{1}{m}(-m\omega^2 q) = -\omega^2 q.$$

時間原点を適当にとれば、 $q(t) = A\cos\omega t$. (A: const.)

$$p(t) \underset{①}{=} m\frac{dq(t)}{dt} = -\omega m A \sin\omega t.$$

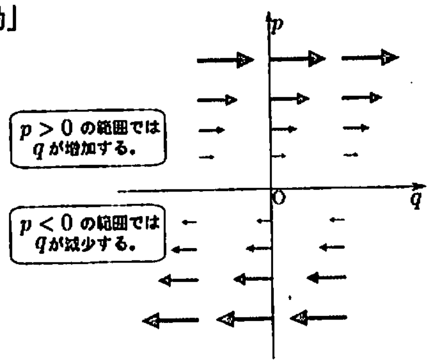
$$\left(H(q(t), p(t)) = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \ (\text{const.}) \right)$$

解軌道は楕円である。



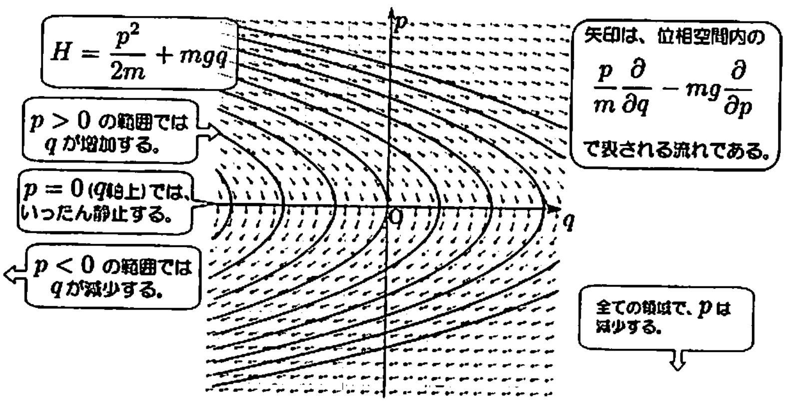
＊ 前野昌弘「よくわかる解析力学」(東京図書, 2013年) より引用

9.3.2 位相空間で表現した「運動」



位相空間での粒子の「速度」は $\frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q}-\frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p}$ という演算子で書けるのだが、自由粒子の場合は $H=\frac{p^2}{2m}$ なので、$\frac{p}{m}\frac{\partial}{\partial q}$ がその演算子である。この演算子によって作られる、位相空間での「流れ」を表示したのが右の図である。q が単位時間あたりに $\dot{q}=\frac{p}{m}$ ずつ増加する（p は変化しない）ので、q 軸の平行な方向への流れとなる。この流れは、$p=0$ から離れるにしたがって速くなる。多くの場合運動量は $p=m\dot{q}$ と書けるので、こういう形（「p が大きいと流れが速い」という状況）になるのはよくあることである。

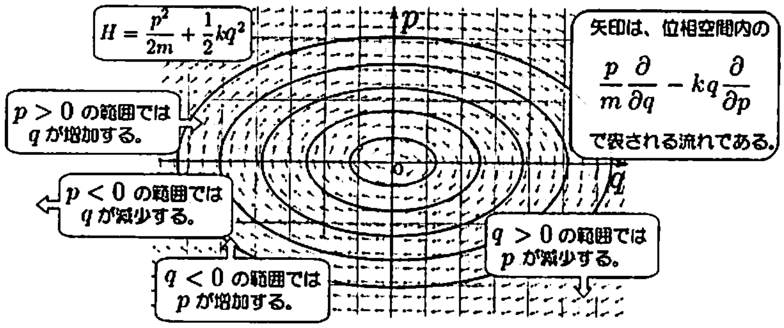
[118] たとえば微分方程式 $\frac{dx}{dt}=f(x)$ を考えた時、右辺がある定数 L を使って $|f(x)-f(y)|<L|x-y|$ という条件（リプシッツ連続性の条件）を満たす時であれば解は一意である。これを満たさない場合では解は一つに決まらない（決まらない例は【演習問題9-3】→ p242）。しかし力学でこういう特殊な状況はまず、出てこない。



上の図は $H=\frac{p^2}{2m}+mgq$、つまり重力 mg が q の負方向に働いている状況での位相空間の流れ図である（218ページの図の「位相空間への射影」に対応している）。

こちらの図の矢印は $\left(\frac{\partial H}{\partial p},-\frac{\partial H}{\partial q}\right)$ の向きだけを表現している（大きさは場所によって違うが、それは表していない）。新しく加わった $-mg\frac{\partial}{\partial p}$ によって、グラフの「下」へ向かう流れ（運動量を小さくしようという流れ）が加わっている（「重力がかかる」という物理現象の、位相空間での表現が $-mg\frac{\partial}{\partial p}$ であり、「グラフの下へ」という流れである）。

次に、調和振動子の場合を見てみよう。



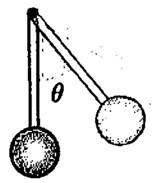
調和振動子の場合の $-kq\dfrac{\partial}{\partial p}$ は、$q>0$ では p を下げる方向に、$q<0$ では p を上げる方向に働く演算子となり、結果として位相空間の中で原点の回りを時計回りにぐるぐると回るような運動を作り出す。

すべての位相空間の図に対して言えることだが、この線はけっして交わることも合流することも分裂することもない[†19]。位相空間上で1点を指定したら、その後の運動は一意的に決まってしまうということの顕れである。

調和振動子の場合、全ての軌跡は楕円であり、一定時間後に（位相空間上の）元の場所に戻ってくる。軌道が楕円であることは、ハミルトニアン $\dfrac{p^2}{2m}+\dfrac{kq^2}{2}$ が一定の線を動くと考えれば当然であることがわかるだろう。

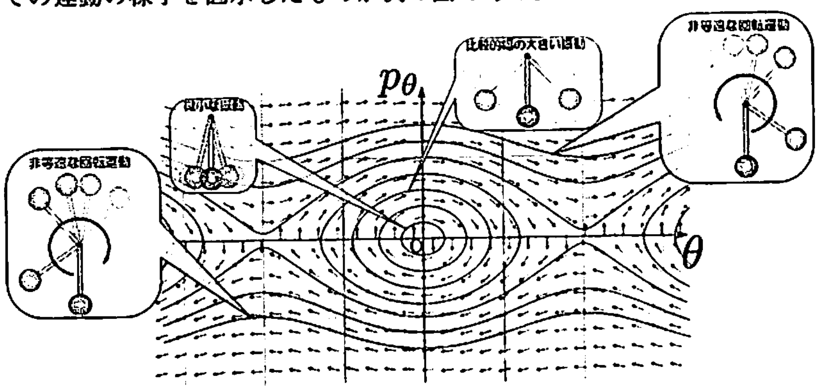
練習問題

【問い 9-2】 調和振動子に、さらに重力 mg がかかっている場合の位相空間の流れ図を描いてみよう。 ヒント → p349 へ　解答 → p361 へ



質量が無視できる剛体棒に質量 m の錘を取り付けた振り子の運動を考えてみる。この場合、触れ角が小さければ振動が起こるが、場合によっては質点が固定点の上にまで達してぐるぐる回ってしまうような運動も起こる。

そのような状況が起こることも踏まえて、位相空間の中での運動の様子を図示したものが次の図である。



[†19] これは電気力線や磁力線などの持つ性質と共通である。交わったり分裂したりすると、運動方程式の解が一意的でなくなる。

この運動方程式を解くのは結構たいへんな作業だが、位相空間の中での「流れ」を考えるだけならそんなにたいへんではない。図には説明を書き込んであるが、じっくり見て「なるほど確かに運動はこの線に沿って起こる」と実感して欲しい[20]。この場合運動は閉じた軌道と、$\theta = \pm\infty$ の無限遠から無限遠へと進み続ける軌道の2種類[21] に分けられる。

Hamilton形式の力学 = 位相空間における流体力学

様々な点(q, p)を初期値とする粒子群の運動