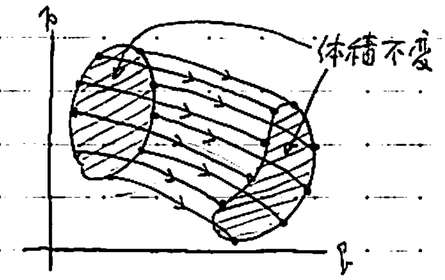
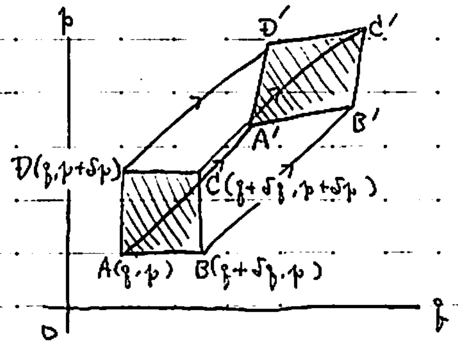
リウヴィル
Liouvilleの定理

位相空間内の有限な領域の各点が正準方程式に従って運動するとき、領域の体積は不変に保たれる。 □



流体力学の言葉で言えば、位相空間における運動は"非圧縮性流体"である。

(証明) (1) まず、自由度 $f=1$ の場合。



ABCD：時刻 t における微小長方形

↓

A'B'C'D'：時刻 $t+\delta t$ における微小四角形

A'B'C'D'の面積を計算する。3点A', B', D'の座標は

$$A' : (q+\dot{q}\,\delta t,\ p+\dot{p}\,\delta t) = \left(q+\frac{\partial H}{\partial p}\delta t,\ p-\frac{\partial H}{\partial q}\delta t\right),$$

$$B' : \left(q+\delta q+\frac{\partial H(q+\delta q, p)}{\partial p}\delta t,\ p-\frac{\partial H(q+\delta q, p)}{\partial q}\delta t\right)$$

$$= \left(q+\delta q+\frac{\partial H}{\partial p}\delta t+\frac{\partial^2 H}{\partial p\,\partial q}\delta q\,\delta t,\ p-\frac{\partial H}{\partial q}\delta t-\frac{\partial^2 H}{\partial q^2}\delta q\,\delta t\right)$$

$$D' : \left(q + \frac{\partial H(q, p+\delta p)}{\partial p}\delta t,\ p + \delta p - \frac{\partial H(q, p+\delta p)}{\partial q}\delta t \right)$$
$$= \left(q + \frac{\partial H}{\partial p}\delta t + \frac{\partial^2 H}{\partial p^2}\delta p\,\delta t,\ p + \delta p - \frac{\partial H}{\partial q}\delta t - \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p}\delta p\,\delta t \right),$$

$$\overrightarrow{A'B'} = \left(\delta q + \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p}\delta q\,\delta t,\ -\frac{\partial^2 H}{\partial q^2}\delta q\,\delta t \right),$$

$$\overrightarrow{A'D'} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}\delta p\,\delta t,\ \delta p - \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p}\delta p\,\delta t \right).$$

$A'B'C'D'$ の面積 $= |\overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{A'D'}|$

$$= \left| \left(\delta q + \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p}\delta q\,\delta t\right)\left(\delta p - \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p}\delta p\,\delta t\right) - \left(-\frac{\partial^2 H}{\partial q^2}\delta q\,\delta t\right)\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}\delta p\,\delta t\right) \right|$$

$= \delta q\,\delta p$ (+高次の微小量).

∴ 微小長方形ABCDの面積は、正準方程式に従う時間発展で不変に保たれる。

(2) 一般の自由度 f の場合。

位相空間内の微小長方形(各辺の長さ $\delta q_1, \cdots, \delta q_f, \delta p_1, \cdots, \delta p_f$)は時間 δt 経過後、体積は

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial q_1(t+\delta t)}{\partial q_1(t)} & \cdots & \frac{\partial q_1(t+\delta t)}{\partial q_f(t)} & \frac{\partial q_1(t+\delta t)}{\partial p_1(t)} & \cdots & \frac{\partial q_1(t+\delta t)}{\partial p_f(t)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial q_f(t+\delta t)}{\partial q_1(t)} & \cdots & \frac{\partial q_f(t+\delta t)}{\partial q_f(t)} & \frac{\partial q_f(t+\delta t)}{\partial p_1(t)} & \cdots & \frac{\partial q_f(t+\delta t)}{\partial p_f(t)} \\ \frac{\partial p_1(t+\delta t)}{\partial q_1(t)} & \cdots & \frac{\partial p_1(t+\delta t)}{\partial q_f(t)} & \frac{\partial p_1(t+\delta t)}{\partial p_1(t)} & \cdots & \frac{\partial p_f(t+\delta t)}{\partial p_f(t)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial p_f(t+\delta t)}{\partial q_1(t)} & \cdots & \frac{\partial p_f(t+\delta t)}{\partial q_f(t)} & \frac{\partial p_f(t+\delta t)}{\partial p_1(t)} & \cdots & \frac{\partial p_f(t+\delta t)}{\partial p_f(t)} \end{vmatrix} \delta q_1 \cdots \delta q_f\, \delta p_1 \cdots \delta p_f$$

となっている。Jacobianを計算すると、

$$\frac{\partial q_i(t+\delta t)}{\partial q_j(t)} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta t \right) = \delta_{ij} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j}\delta t,$$

$$\frac{\partial q_i(t+\delta t)}{\partial p_j(t)} = \frac{\partial}{\partial p_j}\left(q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta t \right) = \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}\delta t,$$

$$\frac{\partial p_i(t+\delta t)}{\partial q_j(t)} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta t \right) = -\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_j}\delta t,$$

$$\frac{\partial p_i(t+\delta t)}{\partial p_j(t)} = \frac{\partial}{\partial p_j}\left(p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta t\right) = \delta_{ij} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_j}\delta t$$

これより

$$\left|\begin{array}{c|c} \delta_{ij} + \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j}\delta t & \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} \\ \hline -\dfrac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_j}\delta t & \delta_{ij} - \dfrac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_j}\delta t \end{array}\right| = 1\,(+\text{高次の微小量})$$

となる。 ⊠

Poisson括弧

$A = A(t, q, p) = A(t; q_1, \cdots, q_f; p_1, \cdots, p_f)$

→ $q_\alpha(t)$, $p_\alpha(t)$ が正準方程式に従って変化するときの $A(t, q, p)$ の時間発展

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{f}\left(\dot{q}_\alpha \frac{\partial A}{\partial q_\alpha} + \dot{p}_\alpha \frac{\partial A}{\partial p_\alpha}\right)$$

$$= \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{f}\left(\frac{\partial A}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial A}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right).$$

Poisson括弧

$$\{A, B\} \equiv \sum_{\alpha=1}^{f}\left(\frac{\partial A}{\partial q_\alpha}\frac{\partial B}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial A}{\partial p_\alpha}\frac{\partial B}{\partial q_\alpha}\right)$$

(A, B : t, q, p の関数)

$\Downarrow$

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t}.$$

とくに A が時刻 t に依らなければ、

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\}.$$

演算 $\{\cdot, H\} : A \mapsto \{A, H\}$ → 正準方程式に従う時間発展
(位相空間内の流れ)

$\Downarrow$

一般の関数 $B(q, p)$ に対して、演算

$\{\cdot, B\} : A \mapsto \{A, B\}$

は位相空間内における何らかの流れを表すだろう。

〈Poisson括弧の性質〉

1° 反対称性 : $\{A, B\} = -\{B, A\}$

2° 双線形性 : α, β, γ const.

$\{\alpha A + \beta B, C\} = \alpha\{A, C\} + \beta\{B, C\}$,

$\{A, \beta B + \gamma C\} = \beta\{A, B\} + \gamma\{A, C\}$.

3° Leibniz則 :

$\{A, BC\} = \{A, B\}C + \{A, C\}B$,

$\{AB, C\} = \{A, C\}B + \{B, C\}A$.

(4°の証明は結構面倒臭い)

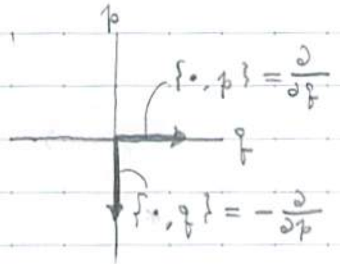
4° Jacobiの恒等式 :

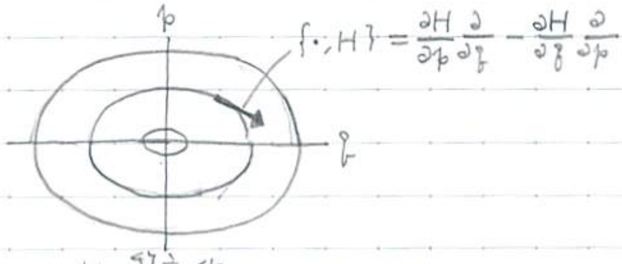
$\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0$. □

$\{\cdot, q_\alpha\} = -\dfrac{\partial}{\partial p_\alpha}$ …… $-p_\alpha$ 方向の方向微分

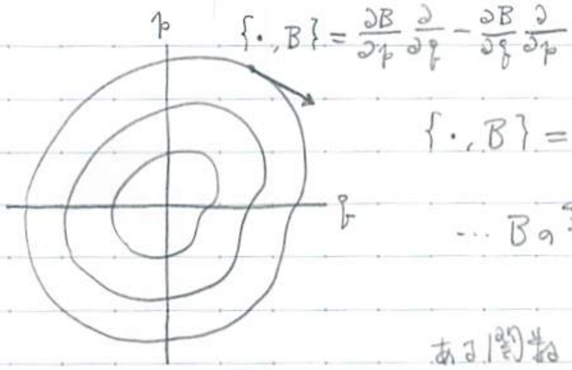
$\{\cdot, p_\alpha\} = \dfrac{\partial}{\partial q_\alpha}$ …… q_α 方向の方向微分

$\{\cdot, H\} = \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{f}\left(\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\frac{\partial}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\frac{\partial}{\partial p_\alpha}\right)$ …… 正準方程式に従う時間発展の方向への方向微分





Hの等高線



$B(q,p)$ の等高線

$\{\cdot, B\} = \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{f}\left(\frac{\partial B}{\partial p_\alpha}\frac{\partial}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial B}{\partial q_\alpha}\frac{\partial}{\partial p_\alpha}\right)$

…… Bの等高面(線)に沿っての方向微分

ある関数 $A(q,p)$ に対し $\{A, B\} = 0$

…… $B(q,p)$ の等高面(線)に沿って $A(q,p)$ は不変である。

q_α は循環座標 $\Leftrightarrow$ $\dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha} = \{H, p_\alpha\} = 0$ $\Leftrightarrow$ p_α は保存量.

↓2018/12/5↓

Jacobiの恒等式より

$$\{A, \{B, C\}\} = \underbrace{\{\{A, B\}, C\}}_{①} - \underbrace{\{\{A, C\}, B\}}_{②}.$$

① 方向微分 $\{\cdot, B\} \to \{\cdot, C\}$
② 方向微分 $\{\cdot, C\} \to \{\cdot, B\}$

①−② は 方向微分 $\{\cdot, \{B, C\}\}$

もし $\{B, C\} = 0$ ならば

$$\{\{A, B\}, C\} = \{\{A, C\}, B\} \quad (\text{上の①,②は同じ})$$

・AとBはPoisson括弧の意味で可換である $\overset{\text{d}}{\Leftrightarrow}$ $\{A, B\} = 0$.

$A(q,p)$, $B(q,p)$ が時間不変なら、$\{A,B\}$ も時間不変である。

$\because$ $\frac{dA}{dt}=\{A,H\}$, $\frac{dB}{dt}=\{B,H\}$, $\frac{d}{dt}\{A,B\}=\{\{A,B\},H\}$.

Jacobiの恒等式から、

$$\{A,\underbrace{\{B,H\}}_{0}\}+\{B,\underbrace{\{H,A\}}_{0}\}+\{H,\{A,B\}\}=0.$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\{A,B\}=-\{H,\{A,B\}\}=0. \quad \boxtimes$$

Hamilton 形式における Hamilton の原理

Hamilton 形式における作用

$$S[q,p]=\int_{t_0}^{t_1} L(t,q,p)\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\Big\{\sum_{\alpha=1}^{f} p_\alpha \underbrace{\dot q_\alpha}_{\dot q_\alpha(t,q,p)} - H(t,q,p)\Big\}\,dt$$

$\delta S[q,p]=0$ (停留) $\longrightarrow$ Hamilton 正準方程式が得られる。

($q_\alpha(t)$ $(\alpha=1,\dots,f)$ $t=t_0,t_1$ で固定)

$$\delta S=\int_{t_0}^{t_1}\Big\{\sum_{\alpha=1}^{f}(\underbrace{p_\alpha\delta\dot q_\alpha}_{\text{部分積分}}+\dot q_\alpha\delta p_\alpha)-\sum_{\alpha=1}^{f}\Big(\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha+\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\delta p_\alpha\Big)\Big\}\,dt$$

$$=\underbrace{\Big[\sum_{\alpha=1}^{f}p_\alpha\delta q_\alpha\Big]_{t=t_0}^{t_1}}_{0}+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\alpha=1}^{f}\Big\{\Big(\dot q_\alpha-\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\Big)\delta p_\alpha-\Big(\dot p_\alpha+\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\Big)\delta q_\alpha\Big\}\,dt=0,$$

$(\because\ \delta q_\alpha(t_0)=\delta q_\alpha(t_1)=0)$

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\alpha=1}^{f}\Big\{\Big(\dot q_\alpha-\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\Big)\delta p_\alpha-\Big(\dot p_\alpha+\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\Big)\delta q_\alpha\Big\}\,dt=0 \quad \text{for } {}^\forall\delta q_\alpha,\ \delta p_\alpha .$$

$$\therefore\ \dot q_\alpha=\frac{\partial H}{\partial p_\alpha},\quad \dot p_\alpha=-\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\quad(\alpha=1,2,\dots,f).$$

… 正準方程式が再び得られた。

2.3 正準変換

正準変数（一般座標、一般運動量）の変換

$$(q,p)=(q_1,\cdots,q_f;p_1,\cdots,p_f)\mapsto(Q,P)=(Q_1,\cdots,Q_f;P_1,\cdots,P_f),$$

$$\left.\begin{aligned}Q_\alpha&=Q_\alpha(t;q,p)=Q_\alpha(t;q_1,\cdots,q_f;p_1,\cdots,p_f)\\P_\alpha&=P_\alpha(t,q,p)=P_\alpha(t;q_1,\cdots,q_f;p_1,\cdots,p_f)\end{aligned}\right\}(\alpha=1,\cdots,f).$$

新しい正準変数も正準方程式を満たす、i.e.、ある関数 $K(t,Q,P)$ が存在し、

$$\dot{Q}_\alpha=\frac{\partial K}{\partial P_\alpha},\quad \dot{P}_\alpha=-\frac{\partial K}{\partial Q_\alpha}\quad(\alpha=1,\cdots,f)\qquad ①$$

が成り立つような変換が望ましい。
そのような変換はどういうものか？

正準方程式 $\Longleftrightarrow$ Hamiltonの原理 より

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{\alpha=1}^{f}p_\alpha\dot{q}_\alpha-H(t,q,p)\right\}dt=0\Longleftrightarrow\delta\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{\alpha=1}^{f}P_\alpha\dot{Q}_\alpha-K(t,Q,P)\right\}dt=0\qquad ②$$

が成り立てばよい。
②が成り立つのはどのようなときか？

ある関数 $W(t,q,Q)=W(t;q_1,\cdots,q_f;Q_1,\cdots,Q_f)$ が存在し、

$$\sum_{\alpha=1}^{f}p_\alpha\dot{q}_\alpha-H(t,q,p)=\sum_{\alpha=1}^{f}P_\alpha\dot{Q}_\alpha-K(t,Q,P)+\frac{d}{dt}W(t,q,Q)\qquad Ⓐ$$

が成り立つとする。

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{\alpha=1}^{f}p_\alpha\dot{q}_\alpha-H\right)dt=\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{\alpha=1}^{f}P_\alpha\dot{Q}_\alpha-K\right)dt+W(t_1,q(t_1),Q(t_1))-W(t_0,q(t_0),Q(t_0)).$$

変分をとるとき、$t=t_0,t_1$ で一般座標 q, Q は固定されるので、②が成立する。
Ⓐは、Q,P が正準方程式①を満たすための十分条件である。

変換 $(q,p)\to(Q,P)$ の具体形

Ⓐより

$$dW=\sum_{\alpha=1}^{f}p_\alpha dq_\alpha-\sum_{\alpha=1}^{f}P_\alpha dQ_\alpha+(K-H)dt.$$

これと

$$dW=\sum_{\alpha=1}^{f}\frac{\partial W}{\partial q_\alpha}dq_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{f}\frac{\partial W}{\partial Q_\alpha}dQ_\alpha+\frac{\partial W}{\partial t}dt$$

ここと比較して,

$$\left.\begin{aligned} & p_\alpha = \frac{\partial W}{\partial q_\alpha}, \quad P_\alpha = -\frac{\partial W}{\partial Q_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, f), \\ & K = H + \frac{\partial W}{\partial t} \end{aligned}\right\} \text{—} (A)$$

正準変換 (canonical transform.)

(A) で与えられる正準変数の変換 $(q, p) \mapsto (Q, P)$

$W(t, q, Q)$ … 正準変換の母関数 (generating function)

例　1次元調和振動子

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2.$$

母関数を

$$W(x, \phi) = \frac{m\omega}{2} x^2 \cot\phi \qquad \left(\cot\phi = \frac{1}{\tan\phi}\right)$$

とする正準変換 $(q, p) \mapsto (\phi, P)$ および新しい Hamiltonian K を求める.

$$p = \frac{\partial W}{\partial x} = m\omega x \cot\phi,$$

$$P = -\frac{\partial W}{\partial \phi} = \frac{m\omega}{2} x^2 \operatorname{cosec}^2\phi \qquad \left(\operatorname{cosec}\phi = \frac{1}{\sin\phi}\right),$$

$$K = H + \frac{\partial W}{\partial t} = H.$$

$$\left.\begin{aligned} & \sqrt{2m\omega P} = m\omega x \operatorname{cosec}\phi \quad \text{より} \quad p = \sqrt{2m\omega P}\cos\phi, \\ & x = \frac{p}{m\omega\cot\phi} = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\sin\phi. \end{aligned}\right\} (1)$$

$$K = H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 = \frac{1}{2m} 2m\omega P \cos^2\phi + \frac{m\omega^2}{2}\frac{2P}{m\omega}\sin^2\phi = \omega P.$$

$$\therefore \quad K = \omega P.$$

新しい変数に対する Hamilton 正準方程式

$$\dot{\phi} = \frac{\partial K}{\partial P}, \quad \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial \phi}.$$

$$\rightarrow \quad \dot{\phi} = \omega, \quad \dot{P} = 0.$$

$$\begin{cases} \phi = \omega t + \alpha & (\alpha : \text{const.}) \\ P = P_0 & (\text{const.}) \end{cases}$$

①により元の変数に戻せば,

$$x = \sqrt{\frac{2P_0}{m\omega}} \sin(\omega t + \alpha), \quad p = \sqrt{2m\omega P_0} \cos(\omega t + \alpha).$$

① … Poincaré 変換 と呼ぶ. $\square$

正準変換の母関数は q, Q を独立変数にとるとは限らない.
Legendre 変換で独立変数を入れ換える.

$$W_1(t, q, P) = W(t, q, Q) + \sum_{\alpha=1}^{f} P_\alpha Q_\alpha$$

とおくと,

$$dW_1 = \sum_{\alpha=1}^{f} (p_\alpha dq_\alpha - P_\alpha dQ_\alpha) + (K - H)dt + \sum_{\alpha=1}^{f} (P_\alpha dQ_\alpha + Q_\alpha dP_\alpha)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{f} (p_\alpha dq_\alpha + Q_\alpha dP_\alpha) + (K - H)dt,$$

$$\therefore \quad p_\alpha = \frac{\partial W_1}{\partial q_\alpha}, \quad Q_\alpha = \frac{\partial W_1}{\partial P_\alpha} \quad (\alpha = 1, \cdots, f), \quad K = H + \frac{\partial W_1}{\partial t}.$$

$$W_2(t, p, Q) = W(t, q, Q) - \sum_{\alpha=1}^{f} p_\alpha q_\alpha.$$

とおくと,

$$dW_2 = \sum_{\alpha=1}^{f} (p_\alpha dq_\alpha - P_\alpha dQ_\alpha) + (K - H)dt - \sum_{\alpha=1}^{f} (p_\alpha dq_\alpha + q_\alpha dp_\alpha)$$

$$= -\sum_{\alpha=1}^{f} (q_\alpha dp_\alpha + P_\alpha dQ_\alpha) + (K - H)dt,$$

$$\therefore \quad q_\alpha = -\frac{\partial W_2}{\partial p_\alpha}, \quad P_\alpha = -\frac{\partial W_2}{\partial Q_\alpha} \quad (\alpha = 1, \cdots, f); \quad K = H + \frac{\partial W}{\partial t}.$$

$$W_3(t, p, P) = W(t, q, Q) + \sum_{\alpha=1}^{f}(-p_\alpha q_\alpha + P_\alpha Q_\alpha).$$

とおくと、

$$dW_3 = \sum_{\alpha=1}^{f}(p_\alpha dq_\alpha - P_\alpha dQ_\alpha) + (K-H)dt$$
$$+ \sum_{\alpha=1}^{f}(-p_\alpha dq_\alpha - q_\alpha dp_\alpha + P_\alpha dQ_\alpha + Q_\alpha dP_\alpha)$$
$$= \sum_{\alpha=1}^{f}(-q_\alpha dp_\alpha + Q_\alpha dP_\alpha) + (K-H)dt,$$

$$\therefore\ q_\alpha = -\frac{\partial W_3}{\partial p_\alpha},\ Q_\alpha = \frac{\partial W_3}{\partial P_\alpha}\ (\alpha = 1, 2, \cdots, f),\ K = H + \frac{\partial W}{\partial t}.$$

例 $W_1(q, P) = \sum_{\alpha=1}^{f} q_\alpha P_\alpha$,

$$p_\alpha = \frac{\partial W_1}{\partial q_\alpha} = P_\alpha,\quad Q_\alpha = \frac{\partial W_1}{\partial P_\alpha} = q_\alpha.$$

$$\therefore\ Q_\alpha = q_\alpha,\ P_\alpha = p_\alpha\ (\alpha = 1, \cdots, f)$$

恒等変換は正準変換である; □

例 $W(q, Q) = \sum_{\alpha=1}^{f} q_\alpha Q_\alpha$.

$$p_\alpha = \frac{\partial W}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha,\quad P_\alpha = -\frac{\partial W}{\partial Q_\alpha} = -q_\alpha.$$

$\therefore\ Q_\alpha = p_\alpha,\ P_\alpha = -q_\alpha\ (\alpha = 1, \cdots, f)$ …座標と運動量の入れ換え。

Hamilton形式の力学では、座標と運動量は同等な変数と見なす。 □

無限小正準変換

恒等変換からごくわずかずれた正準変換 $(q,p)\mapsto(q^\epsilon,p^\epsilon)$ $(\epsilon\approx 0)$

母関数

$$W_1(q,p^\epsilon)=\sum_{\alpha=1}^{f} q_\alpha p_\alpha^\epsilon+\epsilon G(q,p^\epsilon)$$

↓

$$p_\alpha=\frac{\partial W_1}{\partial q_\alpha}=p_\alpha^\epsilon+\epsilon\frac{\partial G(q,p^\epsilon)}{\partial q_\alpha},\quad q_\alpha^\epsilon=\frac{\partial W}{\partial p_\alpha^\epsilon}=q_\alpha+\epsilon\frac{\partial G(q,p^\epsilon)}{\partial p_\alpha^\epsilon}$$

高次の微小量を無視して、

$$\boxed{q^\epsilon_\alpha = q_\alpha+\epsilon \frac{\partial G(q,p)}{\partial p_\alpha},\quad p_\alpha^\epsilon=p_\alpha-\epsilon\frac{\partial G(q,p)}{\partial q_\alpha}}$$

…$G(q,p)$を生成子とする無限小正準変換

例 〈1粒子の3次元運動, Cartesian座標〉

生成子 $G=-\mathbf{n}\cdot\mathbf{p}=-n_xp_x-n_yp_y-n_zp_z$

($\mathbf{n}$: 単位ベクトル, $\mathbf{p}$: (初等力学における)運動量)

$$x^\epsilon=x+\epsilon\frac{\partial G}{\partial p_x}=x^\epsilon-\epsilon n_x,\quad y^\epsilon=y-\epsilon n_y,\quad z^\epsilon=z-\epsilon n_z,$$

$$p_x^\epsilon=p_x-\epsilon\frac{\partial G}{\partial x}=p_x,\quad p_y^\epsilon=p_y,\quad p_z^\epsilon=p_z.$$

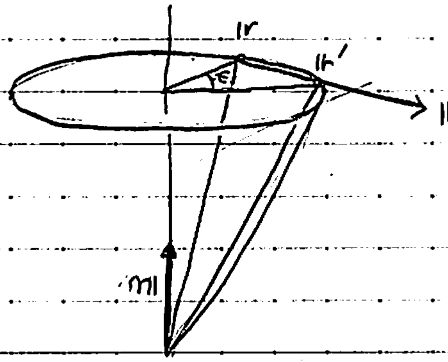
∴ $\mathbf{x}^\epsilon=\mathbf{x}+\epsilon\mathbf{n}$; $\mathbf{p}^\epsilon=\mathbf{p}$ …無限小ベクトル$\epsilon\mathbf{n}$だけの空間推進

例 〈1粒子の3次元運動〉

ある単位ベクトル $\mathbf{n}$ のまわりに座標を微小角 ϵ 回転することを考える。

$\mathbf{r}$: 回転前のある点の座標、

$\mathbf{r}'$: 同じ点の回転後の座標。



$$\mathbf{r}'=\mathbf{r}+\epsilon(\mathbf{r}\times\mathbf{n})$$

↓

実は生成子

$$G=(\mathbf{p}\times\mathbf{r})\cdot\mathbf{n}=-\mathbf{n}\cdot\mathbf{l}$$

の無限小変換である。

∵ $x^\epsilon = x+\epsilon\frac{\partial G}{\partial p_x}=x+\epsilon\frac{\partial}{\partial p_x}\{(\mathbf{p}\times\mathbf{r})\cdot\mathbf{n}\}=x+\epsilon\frac{\partial}{\partial p_x}\{(\mathbf{r}\times\mathbf{n})\cdot\mathbf{p}\}$

$=x+\epsilon(\mathbf{r}\times\mathbf{n})_x$

保存する運動量 ⟷	正準変換の生成子
Noether の定理	無限小正準変換
① 系が空間推進で不変なとき 運動量 p が保存する	— $p \cdot m$ を生成子とする無限小正準変換は空間推進である
② 系が回転で不変なとき 角運動量 l が保存する	— $l \cdot m$ を生成子とする無限小正準変換は空間回転である

Noether charge $\quad Q = \sum_{\alpha=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{\partial G}{\partial p_\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{f} p_\alpha \frac{\partial G}{\partial p_\alpha}$.

例 $G = p_\beta$ ととれば、$Q = p_\beta$ … 一般化運動量 p_β が保存される。

Hamiltonian $H(q, p)$ を生成子とする無限小変換は何か？

$$q_\alpha^\epsilon = q_\alpha + \epsilon \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad p_\alpha^\epsilon = p_\alpha - \epsilon \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \quad (\alpha = 1, \cdots, f).$$

正準方程式

$$\frac{d q_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \frac{d p_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$$

より

$$q_\alpha^\epsilon \simeq q_\alpha(t+\epsilon), \quad p_\alpha^\epsilon \simeq p_\alpha(t+\epsilon) \quad (\alpha = 1, 2, \cdots, f).$$

正準方程式に従う無限小時間発展は、無限小正準変換である。

（後述）正準変換を合成したものは正準変換である。

正準方程式に従う時間発展は、正準方程式に従う多くの無限小時間発展の合成だから、正準変換である。

＊ ある時間が経過したあとの座標, 運動量も同じ正準方程式に従う。

正準変換の性質

ふたつの正準変換 $(q,p)\mapsto(q',p')$, $(q',p')\mapsto(q'',p'')$ の合成変換
$(q,p)(\mapsto(q',p'))\mapsto(q'',p'')$ は正準変換である。

∵ W' : $(q,p)\mapsto(q',p')$ の母関数,
　W'' : $(q',p')\mapsto(q'',p'')$ の母関数

$$\sum_{\alpha=1}^{f} p_\alpha dq_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{f} p'_\alpha dq'_\alpha + \frac{\partial W'}{\partial t}dt = dW',$$

$$\sum_{\alpha=1}^{f} p'_\alpha dq'_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{f} p''_\alpha dq''_\alpha + \frac{\partial W''}{\partial t}dt = dW''.$$

2式の和をとって,

$$\sum_{\alpha=1}^{f} p_\alpha dq_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{f} p''_\alpha dq''_\alpha + \frac{\partial}{\partial t}(W'+W'')dt = d(W'+W'').$$

∴ $(q,p)\mapsto(q'',p'')$ は $W'+W''$ を母関数とする正準変換である。 ☒

＊ 以降, 正準変換は時刻 t を含まないものとする。
（t は Hamiltonian で重要だけど, 正準変数にはパラメータとして入ってるに過ぎない。）

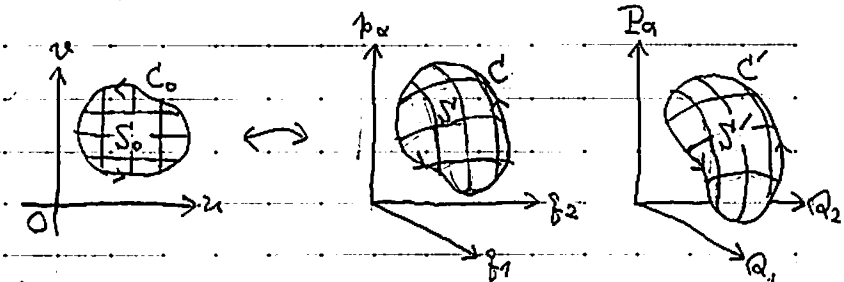
$(q,p)\mapsto(Q,P)$ 正準変換（母関数 W）

$$\sum_{\alpha=1}^{f} p_\alpha dq_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{f} P_\alpha dQ_\alpha = dW. \quad \text{―①}$$

$$① \Leftrightarrow \oint_C \sum_{\alpha=1}^{f} p_\alpha dq_\alpha = \oint_{C'} \sum_{\alpha=1}^{f} P_\alpha dQ_\alpha$$

C : (q,p) 空間内の任意の閉曲線, C' : C の正準変換による像).

S : C に囲まれた曲面,
S' : C' 〃



パラメータ付け

$q_\alpha = q_\alpha(u,v)$, $p_\alpha = p_\alpha(u,v)$, $(\alpha=1,\cdots,f)$.
$Q_\alpha = Q_\alpha(u,v)$, $P_\alpha = P_\alpha(u,v)$

$$\oint_C \sum_{\alpha=1}^{f} p_\alpha \, dq_\alpha = \oint_{C_0} \sum_{\alpha=1}^{f} p_\alpha \left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial u} du + \frac{\partial q_\alpha}{\partial v} dv \right)$$

［Stokesの定理より］

$$= \iint_{S_0} \sum_{\alpha=1}^{f} \left\{ \frac{\partial}{\partial u}\left(p_\alpha \frac{\partial q_\alpha}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(p_\alpha \frac{\partial q_\alpha}{\partial u} \right) \right\} du\,dv$$

$$= \iint_{S_0} \sum_{\alpha=1}^{f} \left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial u} \frac{\partial q_\alpha}{\partial v} - \frac{\partial q_\alpha}{\partial u} \frac{\partial p_\alpha}{\partial v} \right) du\,dv = -\iint_{S_0} \sum_{\alpha=1}^{f} \frac{\partial(q_\alpha, p_\alpha)}{\partial(u, v)} du\,dv.$$

同様にして、

$$\oint_C \sum_{\alpha=1}^{f} P_\alpha \, dQ_\alpha = -\iint_{S_0} \sum_{\alpha=1}^{f} \frac{\partial(Q_\alpha, P_\alpha)}{\partial(u, v)} du\,dv.$$

$$\therefore \iint_{S_0} \sum_{\alpha=1}^{f} \frac{\partial(q_\alpha, p_\alpha)}{\partial(u, v)} du\,dv = \iint_{S_0} \sum_{\alpha=1}^{f} \frac{\partial(Q_\alpha, P_\alpha)}{\partial(u, v)} du\,dv.$$

$$\iint_S \sum_{\alpha=1}^{f} dq_\alpha \, dp_\alpha = \iint_S \sum_{\alpha=1}^{f} dQ_\alpha \, dP_\alpha.$$

次の積分は正準変換で不変である：

$$\oint_C \sum_{\alpha=1}^{f} p_\alpha \, dq_\alpha, \quad \iint_S \sum_{\alpha=1}^{f} dq_\alpha \, dp_\alpha,$$

C： 位相空間内の閉曲線,

S： 〃 曲面.

次の積分も正準変換で不変であることが示される：

$$\int \cdots \int_V dq_1 \cdots dq_f \, dp_1 \cdots dp_f$$

（V： 位相空間内の2f次元領域）

Poisson 括弧

$$\{A,B\} \equiv \sum_{\alpha=1}^{f}\left(\frac{\partial A}{\partial q_\alpha}\frac{\partial B}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial A}{\partial p_\alpha}\frac{\partial B}{\partial q_\alpha}\right)$$

は正準変換で不変であることを、これから示す。

(記号の準備)

$$\boldsymbol{x} = (x_1 \cdots x_f \; x_{f+1} \cdots x_{2f})^T = (q_1, \cdots, q_f, p_1, \cdots, p_f)^T,$$

$$\boldsymbol{X} = (X_1 \cdots X_f \; X_{f+1} \cdots X_{2f})^T = (Q_1, \cdots, Q_f, P_1, \cdots, P_f)^T,$$

$$J = \left(\begin{array}{c|c} O & I_f \\ \hline -I_f & O \end{array}\right) \quad (I_f : f\text{次単位行列}),$$

$$\sum_{\alpha=1}^{f}\frac{\partial(q_\alpha, p_\alpha)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial \boldsymbol{x}^T}{\partial u} J \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v}, \quad \sum_{\alpha=1}^{f}\frac{\partial(q_\alpha, p_\alpha)}{\partial(u,v)} = \sum_{\alpha=1}^{f}\frac{\partial(Q_\alpha, P_\alpha)}{\partial(u,v)} \text{ より、}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}^T}{\partial u} J \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v} = \frac{\partial \boldsymbol{X}^T}{\partial u} J \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial v}.$$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial X_1}{\partial x_{2f}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial X_{2f}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial X_{2f}}{\partial x_{2f}} \end{pmatrix} \quad (2f \times 2f \text{ 行列})$$

を導入すると、合成関数の微分則より $\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u} = M\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u}$ etc. であるから、

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}^T}{\partial u} M^T J M \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v} = \frac{\partial \boldsymbol{x}^T}{\partial u} J \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v}.$$

これが (q,p) の任意のパラメータ付け (u,v) に対して成り立つから、次を得る：

$$M^T J M = J. \qquad \text{—①}$$

これからさらに、

$$M J M^T = J \qquad \text{—②}$$

が成り立つことを示す。①両辺の det をとって、

$(\det M)^2 \det J = \det J$, $\det J \neq 0$ により、$(\det M)^2 = 1$. $\det M = \pm 1$.

正準変換 $(q,p) \mapsto (Q,P)$ が、恒等変換より連続的に変形して得られる変換ならば、

$\det M = 1$ ∴ M は正則行列である

①両辺に右から M^{-1} を掛けて、$M^T J = J M^{-1}$. 両辺に両側から J を掛けると、$J^2 = -I_{2f}$ より $J M^T = M^{-1} J$. 両辺に左辺から M を掛けて②を得る。

$\det M = 1$ は次を意味する：

$$\frac{\partial(Q_1,\cdots,Q_f,P_1,\cdots,P_f)}{\partial(q_1,\cdots,q_f,p_1,\cdots,p_f)}=1.$$

これより，

$$\int\cdots\int_{V'} dQ_1\cdots dQ_f\,dP_1\cdots dP_f$$

$$=\int\cdots\int_V \left|\frac{\partial(Q_1,\cdots,Q_f,P_1,\cdots,P_f)}{\partial(q_1,\cdots,q_f,p_1,\cdots,p_f)}\right| dq_1\cdots dq_f\,dp_1\cdots dp_f$$

$$=\int\cdots\int_V dq_1\cdots dq_f\,dp_1\cdots dp_f$$

V：位相空間内の2f次元空間，
V'：Vの正準変換による像

位相空間内の2f次元領域の体積は，正準変換で不変である．

〈Poisson括弧の不変性〉

ナブラ(nabla)演算子を導入：

$$\nabla=\nabla_x=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_{2f}}\right)^T=\left(\frac{\partial}{\partial q_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial q_f},\frac{\partial}{\partial p_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial p_f}\right)^T.$$

↓

Poisson括弧 $\boxed{\{A,B\}=(\nabla A)^T J(\nabla B).}$

正準変数(Q,P)による Poisson括弧を$\{A,B\}'$と記す：

$$\{A,B\}'\equiv(\nabla_X A)^T J(\nabla_X B)=\sum_{\alpha=1}^{f}\left(\frac{\partial A}{\partial Q_\alpha}\frac{\partial B}{\partial P_\alpha}-\frac{\partial A}{\partial P_\alpha}\frac{\partial B}{\partial Q_\alpha}\right).$$

合成関数の微分則から，

$$\frac{\partial A}{\partial x_j}=\sum_{i=1}^{2f}\frac{\partial A}{\partial X_i}\frac{\partial X_i}{\partial x_j},\quad (\nabla_x A)^T=(\nabla_X A)M,\quad \nabla_x B=M^T\nabla_X B$$

であるから，

$$\{A,B\}=(\nabla_x A)^T J(\nabla_x B)=(\nabla_X A)^T \overbrace{MJM^T}^{J\ (\because ②)}(\nabla_X B)=(\nabla_X A)^T J(\nabla_X B)=\{A,B\}'.$$

∴ Poissonの括弧は正準変換で不変である．