解析学・中間試験・解答

（担当）緒方秀教 (e-mail)ogata@im.uec.ac.jp

2019 年 12 月 9 日（月）

注意

- 試験時間 60 分.
- 問題用紙 1 枚, 解答用紙 1 枚, 計算用紙 1 枚.
- 筆記用具以外の**持込不可**.
- **虚数の指数関数は Euler の公式を用いて三角関数に書き直すこと.**

第 1 問　次の常微分方程式の一般解を求めよ.

$$(1)\ y'' - 5y' + 6y = 0, \quad (2)\ y'' - 8y' + 16y = 0, \quad (3)\ y'' + 6y' + 10y = 0,$$
$$(4)\ y'' - 2y' + 5y = 2x + 4, \quad (5)\ y'' - y = \mathrm{e}^x.$$

以下，C_1, C_2 は任意定数とする．

(1). $y = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{3x}$.

(2). $y = \mathrm{e}^{4x}(C_1 + C_2 x)$.

(3). $y = \mathrm{e}^{-3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

(4). $y = \mathrm{e}^{x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \dfrac{2}{5}x + \dfrac{24}{25}$.

(5). $y = C_1\mathrm{e}^{-x} + \left(C_2 + \dfrac{x}{2}\right)\mathrm{e}^x$.

第 2 問　調和振動子の運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0 \quad（\omega \text{ は正の定数}）$$

を次の手順で解く.

1. 次の方程式（エネルギー保存則）が成り立つことを示せ.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 = \text{定数}.$$

2. 前問より $x(t)$ は次の変数分離形の微分方程式を満たす.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{C^2 - \omega^2 x^2} \quad（C \text{ は定数}）.$$

この微分方程式を解くことにより，もとの運動方程式の一般解を求めよ.

(1). 運動方程式の両辺に $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ を掛けて積分する．あるいは，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\frac{\omega^2}{2}x^2\right\}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2x\right)=0$$

による．

(2).

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{C^2-\omega^2x^2}}=\pm\mathrm{d}t,$$

$$\pm t+\mathrm{const.}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{C^2-\omega^2x^2}}=\frac{1}{\omega}\int\frac{\mathrm{d}(\omega x/C)}{\sqrt{1-(\omega x/C)^2}}=\frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{\omega x}{C}\right)+\mathrm{const.}$$

$$\therefore\quad x(t)=C\sin(\omega t+\alpha).$$

α は定数．$\pm C/\omega$ を改めて C と記した．

第 3 問　強制振動を受ける調和振動子の運動方程式は次で与えられる．

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+{\omega_0}^2x=a\cos\omega t\quad(\omega,\omega_0>0,\ a\text{ は定数}).$$

この運動方程式の一般解を求めよ．

斉次形 $\ddot{x}+{\omega_0}^2x=0$ の一般解は $x=C_1\cos\omega_0t+C_2\sin\omega_0t$（$C_1,C_2$ は任意定数）．

特解を求める．方程式

$$\ddot{x}+{\omega_0}^2x=a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

の特解を求めて実部を取ればよい．

$\omega\neq\omega_0$ の場合，明らかに $x=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ （A は定数）の形の特解が存在する．これを方程式に代入して，

$$(-\omega^2+{\omega_0}^2)A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}=a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},\quad A=\frac{a}{{\omega_0}^2-\omega^2},$$

よって，特解 $y=\dfrac{a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{{\omega_0}^2-\omega^2}$ を得る．実部をとって，$y=\dfrac{a\cos\omega t}{{\omega_0}^2-\omega^2}$.

$\omega=\omega_0$ の場合．$x=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0t}y$ とおいて代入すると，$\ddot{y}+2\mathrm{i}\omega_0\dot{y}=a$ を得る．これは特解 $y=at/(2\mathrm{i}\omega_0)$ を持つ．したがって，もとの方程式は特解 $x=at\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0t}/(2\mathrm{i}\omega_0)$ を持つ．実部をとると，$y=at\sin\omega_0t/(2\omega_0)$.

$$\therefore\quad x=C_1\cos\omega_0t+C_2\sin\omega_0t+\begin{cases}\dfrac{a\cos\omega t}{{\omega_0}^2-\omega^2} & (\ \omega\neq\omega_0\ )\\ \dfrac{a}{2\omega_0}t\sin\omega_0t & (\ \omega=\omega_0\ )\end{cases}\quad(C_1,C_2\text{ は任意定数})．$$