直交多項式

$-\infty \leqq a < b \leqq +\infty$,

$w(x)$: 密度関数 $\left(\int_{-\infty}^{\infty} w(x)\,dx < +\infty,\right.$ 有限個の零点を除いて $\left. w(x) > 0 \right)$

関数 $f(x)$, $g(x)$ の 内積

$$(f, g) = (f, g)_w \equiv \int_a^b f(x) g(x) w(x)\,dx.$$

ノルム

$$\|f\| = \|f\|_w \equiv \sqrt{(f, f)} = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 w(x)\,dx \right\}^{1/2}.$$

$\{R_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ は 直交多項式系 である.

$\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ $R_n(x)$ は n 次多項式であり

$$(R_m, R_n) = \int_a^b R_m(x) R_n(x) w(x)\,dx = 0 \quad (m \neq n). \qquad \square$$

例 1) $(a, b) = (-1, 1)$, $w(x) = 1$.

ルジャンドル Legendre 多項式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

$$(P_m, P_n) = \int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x)\,dx = \frac{\delta_{mn}}{2n+1} \qquad \left(\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \text{ Kronecker のデルタ} \right)$$

$P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$,

$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$, $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$, $\cdots$

2) $(a, b) = (-1, 1)$, $w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$

チェビシェフ Chebyshev 多項式

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

$$(T_m, T_n) = \int_{-1}^{1} \frac{T_m(x) T_n(x)}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \pi/2 & (m = n \neq 0) \\ \pi & (m = n = 0), \end{cases}$$

$T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$,

$T_2(x) = 2x^2 - 1$, $T_3(x) = 4x^3 - 3x$, $\cdots$

3) $(a, b) = (0, +\infty)$, $w(x) = e^{-x}$
Laguerre（ラゲール）多項式

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)$$

$$(L_m, L_n) = \int_{-\infty}^{\infty} L_m(x)L_n(x)e^{-x}\,dx = \delta_{mn},$$

$$L_0(x) = 1,\quad L_1(x) = 1-x,\quad L_2(x) = 1-2x+\frac{x^2}{2},$$

$$L_3(x) = 1-3x+\frac{3}{2}x^2-\frac{x^3}{6},\quad \cdots$$

4) $(a, b) = (-\infty, +\infty)$, $w(x) = e^{-x^2/2}$
Hermite（エルミート）多項式

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2/2}$$

$$(H_m, H_n) = \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2/2}\,dx = \delta_{mn}\sqrt{2\pi}\,n!,$$

$$H_0(x) = 1,\quad H_1(x) = x,\quad H_2(x) = x^2-1,\quad H_3(x) = x^3-3x,\quad \cdots.$$

直交多項式の性質

1) $Q(x)$ が $n-1$ 次以下の多項式なら $(Q, R_n) = 0$
2) 直交多項式系は定数倍を除いて一意的に定まる。すなわち，
$\{R_n(x)\}$, $\{\widetilde{R}_n(x)\}$ を直交多項式系とすると，

$$\widetilde{R}_n(x) = c_n R_n(x) \quad (c_n : \text{const.}) \qquad \square$$

（証明） 1) $Q(x)$ は $Q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k R_k(x)$ と展開されるから，

$$(Q, R_n) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k (R_k, R_n) = 0.$$

2) $R_n(x)$, $\widetilde{R}_n(x)$ の最高次係数をそれぞれ k_n, $\widetilde{k}_n$ とすると，
$\widetilde{R}_n(x) - (\widetilde{k}_n/k_n)R_n(x)$ は $n-1$ 次以下の多項式であるから，

$$\left\|\widetilde{R}_n - \frac{\widetilde{k}_n}{k_n}R_n\right\|^2 = \left(\widetilde{R}_n - \frac{\widetilde{k}_n}{k_n}R_n, \widetilde{R}_n\right) - \frac{\widetilde{k}_n}{k_n}\left(\widetilde{R}_n - \frac{\widetilde{k}_n}{k_n}R_n, R_n\right) = 0,$$

$$\therefore\quad \widetilde{R}_n(x) = \frac{\widetilde{k}_n}{k_n}R_n(x). \qquad \boxtimes$$

3) 三項漸化式

$$R_{n+1}(x) = (\gamma_n x - \alpha_n) R_n(x) - \beta_n R_{n-1}(x) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

ここで、 $R_{-1} = 0$

$$\gamma_n = \frac{k_{n+1}}{k_n} \quad (k_n : R_n(x) \text{ の最高次係数}),$$

$$\alpha_n = \gamma_n \frac{(xR_n, R_n)}{\|R_n\|^2}, \quad \beta_n = \frac{\gamma_n \|R_n\|^2}{\gamma_{n-1} \|R_{n-1}\|^2}.$$

□

(証明) $R_{n+1}(x) - \gamma_n x R_n(x) = R_{n+1}(x) - \frac{k_{n+1}}{k_n} x R_n(x)$ は n 次以下の多項式であるから

$$R_{n+1}(x) - \gamma_n x R_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \beta_j^{(n)} R_j(x),$$

$$\beta_j^{(n)} = \frac{(R_{n+1} - \gamma_n x R_n, R_j)}{\|R_j\|^2} \quad (j = 0, 1, \cdots, n)$$

と展開される.

$$(R_{n+1} - \gamma_n x R_n, R_j) = -\gamma_n (x R_n, R_j)$$
$$= -\gamma_n (R_n, x R_j) = 0 \quad (\text{if } j \leqq n-2)$$

により、 $\beta_j^{(n)} = 0 \ (j \leqq n-1)$.

$$\beta_n^{(n)} = -\gamma_n \frac{(xR_n, R_n)}{\|R_n\|^2},$$

$$\beta_n^{(n-1)} = -\gamma_n \frac{(xR_n, R_{n-1})}{\|R_{n-1}\|^2},$$

$$(xR_n, R_{n-1}) = (R_n, xR_{n-1})$$
$$= \left(R_n, \frac{k_{n-1}}{k_n} R_n + (n-1\text{次以下の多項式})\right) = \frac{\|R_n\|^2}{\gamma_{n-1}},$$

$$\therefore \ \beta_n^{(n-1)} = -\frac{\gamma_n \|R_n\|^2}{\gamma_{n-1} \|R_{n-1}\|^2}.$$

よって、題意の三項漸化式を得る. ☒

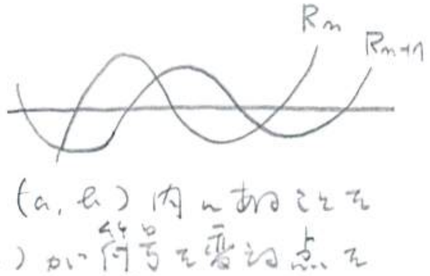
4) クリストッフェル ダルブー
Christoffel - Darboux の恒等式

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{R_k(x)R_k(y)}{\|R_k\|^2} = \frac{1}{\gamma_n \|R_n\|^2 (x-y)} \begin{vmatrix} R_{n+1}(x) & R_n(x) \\ R_{n+1}(y) & R_n(y) \end{vmatrix} \quad (x \neq y). \quad \square$$

(証明)
$$\begin{vmatrix} R_{k+1}(x) & R_k(x) \\ R_{k+1}(y) & R_k(y) \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} (\gamma_k x - \alpha_k)R_k(x) - \beta_k R_{k-1}(x) & R_k(x) \\ (\gamma_k y - \alpha_k)R_k(y) - \beta_k R_{k-1}(y) & R_k(y) \end{vmatrix}$$
$$= \gamma_k(x-y)R_k(x)R_k(y) + \beta_k \begin{vmatrix} R_k(x) & R_{k-1}(y) \\ R_k(x) & R_{k-1}(y) \end{vmatrix}$$
$$= \gamma_k(x-y)R_k(x)R_k(y) + \frac{\gamma_k \|R_k\|^2}{\gamma_{k-1}\|R_{k-1}\|^2} \begin{vmatrix} R_k(x) & R_{k-1}(x) \\ R_k(y) & R_{k-1}(y) \end{vmatrix},$$
$$\frac{1}{\gamma_k \|R_k\|^2} \begin{vmatrix} R_{k+1}(x) & R_k(x) \\ R_{k+1}(y) & R_k(y) \end{vmatrix} - \frac{1}{\gamma_{k-1}\|R_{k-1}\|^2} \begin{vmatrix} R_k(x) & R_{k-1}(y) \\ R_k(y) & R_{k-1}(y) \end{vmatrix}$$
$$= (x-y)\frac{R_k(x)R_k(y)}{\|R_k\|^2}.$$

両辺の和を $k=0,1,\cdots,n$ についてとると、$R_{-1}=0$ より題意の恒等式の成立がわかる。

5) (零点の分布) $R_n(x)$ の零点 $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_n^{(n)}$ $(x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \cdots < x_n^{(n)})$ はすべて単根で開区間 (a, b) 内にあり、
$$a < x_1^{(n+1)} < x_1^{(n)} < x_2^{(n+1)} < x_2^{(n)} < \cdots < x_n^{(n+1)} < x_n^{(n)} < x_{n+1}^{(n+1)} < b$$
を満たす。



(証明) 前半: $x_1^{(n)}, \cdots, x_n^{(n)}$ が単根で (a, b) 内にあることを言うには、開区間 (a, b) 内で $R_n(x)$ が符号を変える点を $\xi_1, \cdots, \xi_m$ $(\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_m)$ として $G(x) = \prod_{k=1}^{m}(x-\xi_k)$ とおいたとき、$m = n$ となることを言えばよい。
$m < n$ と仮定すると、$G(x)$ は $n-1$ 次以下の多項式なので $(G, R_n) = 0$.

一方，$G(x)$ のつくり方より $(G, R_m) > 0$ または $(G, R_n) < 0$ となるので矛盾．よって，$m = n$ である．

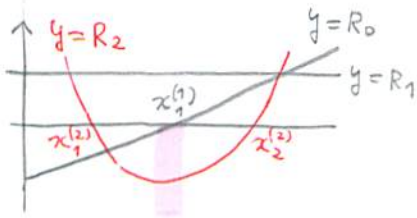
後半：（ $R_0 > 0$, $k_m > 0$ と仮定しておく．）

小さい n について検証する．

$n = 1$ の場合，三項漸化式より

$$R_2(x_k^{(1)}) = -\beta_1 R_0 < 0.$$

よって，$R_2(x)$ のグラフを描こうとすると，



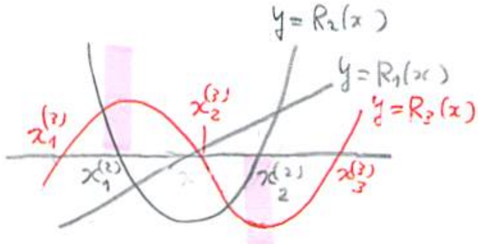
右図の　を通らなければならないので，

$x_1^{(2)} < x_1^{(1)} < x_2^{(2)}$ となることがわかる．

$n = 2$ の場合，三項漸化式より

$$R_3(x_k^{(2)}) = -\beta_2 R_1(x_k^{(2)})$$

となり，$R_3(x_k^{(2)})$ と $R_1(x_k^{(2)})$ は逆符号である．



よって，$R_3(x)$ のグラフを描こうとすると，

右図の　を通らなければならないので，

$x_1^{(3)} < x_1^{(2)} < x_2^{(3)} < x_2^{(2)} < x_3^{(3)}$ となることがわかる．

このような考察を続ければ，一般の n に対して題意の不等式が成り立つことがわかるであろう． ⊠

6)（選点直交性）

$$\sum_{i=1}^{n} w_i^{(n)} R_\ell(x_i^{(n)}) R_m(x_i^{(n)}) = \delta_{\ell m} \|R_m\|^2 \quad (0 \leqq \ell, m \leqq n)$$

ここで，

$$\frac{1}{w_i^{(n)}} \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \frac{R_k(x_i^{(n)})^2}{\|R_k\|^2} = \frac{R_{n-1}(x_i^{(n)}) R_n'(x_i^{(n)})}{\gamma_{n-1} \|R_{n-1}\|^2} \quad (i = 1, \cdots, n). \quad \text{——} (\#)$$

□

（証明） Christoffel-Darboux の恒等式で $n \to n-1$, $x = x_i^{(n)}$, $y = x_j^{(n)}$ $(i \neq j)$ とおくと，

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{R_k(x_i^{(n)}) R_k(x_j^{(n)})}{\|R_k\|^2} = 0. \quad \text{——} Ⓐ$$

$n \times n$ 行列 R, Δ, W を次で定義する：

$$R = \begin{bmatrix} R_0(x_1^{(n)}) & R_1(x_1^{(n)}) & \cdots & R_{n-1}(x_1^{(n)}) \\ R_0(x_2^{(n)}) & R_1(x_2^{(n)}) & \cdots & R_{n-1}(x_2^{(n)}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_0(x_n^{(n)}) & R_1(x_n^{(n)}) & \cdots & R_{n-1}(x_n^{(n)}) \end{bmatrix},$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} \|R_0\|^{-1} & & & \\ & \|R_1\|^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \|R_{n-1}\|^{-1} \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} \sqrt{w_1^{(n)}} & & & \\ & \sqrt{w_2^{(n)}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{w_n^{(n)}} \end{bmatrix}.$$

すると，$w_i^{(n)}$ の定義と Ⓐ は次の行列の関係式で表される：

$$R\Delta^2 R^T = W^{-2}.$$

これより

$$(WR\Delta)(\Delta R^T W) = (WR\Delta)(WR\Delta)^T = I,$$

$$(WR\Delta)^T = (WR\Delta)^{-1},$$

$$(WR\Delta)^T(WR\Delta) = (WR\Delta)^{-1}(WR\Delta) = I,$$

$$\therefore \quad \Delta R^T W^2 R \Delta = I$$

$$\text{左辺の}(i,j)\text{成分} = \frac{1}{\|R_i\|}\sum_{k=1}^{n} R_{i+1}(x_k^{(n)})\, w_k^{(n)}\, R_{j+1}(x_k^{(n)})\frac{1}{\|R_j\|}$$

$$= \delta_{ij}.$$

ゆえに，題意の選点直交性を得る．

（㈱の第2の等号） Christoffel - Darboux の恒等式で $n \to n-1$，$y = x_i^{(n)}$ とおくと，

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{R_k(x)R_k(x_i^{(n)})}{\|R_k\|^2} = \frac{R_n(x)R_{n-1}(x_i^{(n)})}{\gamma_{n-1}\|R_{n-1}\|^2(x - x_i^{(n)})}.$$

$x \to x_i^{(n)}$ とすると題意の等式を得る． ⊠