Legendre 多項式

$$(f,g)=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx,\quad \|f\|=\sqrt{(f,f)}=\left\{\int_{-1}^{1} f(x)^2\,dx\right\}^{1/2}$$

($f(x)$, $g(x)$ 実数値関数)

Legendre 多項式

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n \quad (n=0,1,2,\cdots).$$

$$P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x,\quad P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),\quad P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x),\ \cdots$$

・直交性: $(P_m,P_n)=\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx=\frac{2}{2n+1}\delta_{mn}$.

∵ $m<n$ とする。

$$(P_m,P_n)=\frac{1}{2^{m+n}m!\,n!}\underbrace{\int_{-1}^{1}\left(\frac{d}{dx}\right)^m (x^2-1)^m\cdot\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n\,dx}_{①}$$

部分積分を繰り返すことにより

$$① = \underbrace{\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^m (x^2-1)^m\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1}(x^2-1)^n\right]_{-1}^{1}}_{0}$$

$$-\int_{-1}^{1}\left(\frac{d}{dx}\right)^{m+1}(x^2-1)^m\cdot\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1}(x^2-1)^n\,dx$$

$$= -\underbrace{\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{m+1}(x^2-1)^m\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-2}(x^2-1)^n\right]_{-1}^{1}}_{0}$$

$$+\int_{-1}^{1}\left(\frac{d}{dx}\right)^{m+2}(x^2-1)^m\cdot\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-2}(x^2-1)^n\,dx$$

$$=\cdots$$

$$=(-1)^{m+1}\int_{-1}^{1}\underbrace{\left(\frac{d}{dx}\right)^{2m+1}(x^2-1)^m}_{0}\cdot\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-m-1}(x^2-1)^n\,dx$$

$$=0.$$

$m=n$ の場合、上と同様の計算より

$$\int_{-1}^{1}\left\{\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n\right\}^2 dx=(-1)^n\int_{-1}^{1}\underbrace{\left(\frac{d}{dx}\right)^{2n}(x^2-1)^n}_{②}\cdot(x^2-1)^n\,dx$$

② $m=n$ である：

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{2n}(x^2-1)^n = \left(\frac{d}{dx}\right)^{2n} x^{2n} = (2n)!$$

$\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\,dx$ の計算，$\xi = \frac{x+1}{2} \Leftrightarrow x = 2\xi - 1$ と変数変換すると，

$$\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\,dx = (-1)^n\int_0^1 (2\xi)^n \{2(1-\xi)\}^n\, 2\,d\xi$$

$$= 2^{2n+1}(-1)^n\int_0^1 \xi^n(1-\xi)^n\,d\xi = 2^{2n+1}(-1)^n\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$$

以上より

$$\|P_n\|^2 = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}(2n)!\, 2^{2n+1}(-1)^n\frac{(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1}.$$

cf. $\displaystyle\int_0^1 \xi^m(1-\xi)^n\,d\xi = \frac{m!\,n!}{(2m+1)!}$ $(m, n = 0, 1, 2, \cdots)$.

三項漸化式

$P_0(x) = 1$,

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xP_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

∵ 一般の直交多項式の三項漸化式

$$R_{n+1}(x) = (\gamma_n x - \alpha_n)R_n(x) - \beta_n R_{n-1}(x),$$

$$\gamma_n = \frac{k_{n+1}}{k_n} \quad (k_n : R_n(x) \text{ の最高次係数}),$$

$$\alpha_n = \frac{(xR_n, R_n)}{\|R_n\|^2}, \quad \beta_n = \frac{\gamma_n\|R_n\|^2}{\gamma_{n-1}\|R_{n-1}\|^2}$$

これから，

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n(x^{2n}+\cdots) \text{ より } k_n = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2},$$

$$\gamma_n = \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}((n+1)!)^2}\,\frac{2^n(n!)^2}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{2(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n+1}.$$

$$\alpha_n = \frac{(xP_n, P_n)}{\|P_n\|^2} = \frac{1}{\|P_n\|^2}\int_{-1}^{1} \underbrace{xP_n(x)^2}_{\text{奇関数}}\, dx = 0$$

$$\beta_n = \frac{2n+1}{n+1}\cdot\frac{2}{2n+1}\cdot\frac{n}{2n+1}\cdot\frac{2n-1}{2} = \frac{n}{n+1}. \qquad \boxtimes$$

Legendreの微分方程式

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dP_n(x)}{dx}\right\} + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

∵ 左辺は n次多項式であるから

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dP_n(x)}{dx}\right\} = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x)$$

と展開される。直交性より

$$c_k\|P_k\|^2 = \int_{-1}^{1} P_k(x)\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dP_n(x)}{dx}\right\}dx$$

$$= \underbrace{\left[P_k(x)(1-x^2)\frac{dP_n(x)}{dx}\right]_{-1}^{1}}_{0} - \int_{-1}^{1}\frac{dP_k(x)}{dx}(1-x^2)\frac{dP_n(x)}{dx}dx$$

$$= -\underbrace{\left[(1-x^2)\frac{dP_k(x)}{dx}P_n(x)\right]_{-1}^{1}}_{0} + \int_{-1}^{1}\underbrace{\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dP_k(x)}{dx}\right\}}_{\text{高々}k\text{次多項式}}P_n(x)\,dx,$$

よって、$k<n$ ならば $c_k = 0$.

c_n を求めるには、最高次係数に注目すればよい。

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dP_n(x)}{dx}\right\} = c_n P_n(x).$$

右辺 $= k_n c_n x^n + \cdots,$

左辺 $= \frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{d}{dx}(k_n x^n + \cdots)\right\}$

$= \frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)(n k_n x^{n-1} + \cdots)\right\} = -k_n n(n+1)x^n + \cdots,$

∴ $c_n = -n(n+1)$. $\boxtimes$

Legendre 多項式の母関数

$$F(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x).$$

導出は後述。これを用いれば、いろんな公式が導出できる。

〈漸化式〉

$$(1-x^2)\frac{dP_n(x)}{dx} = (n+1)\{xP_n(x) - P_{n+1}(x)\}$$
$$= -n\{xP_n(x) - P_{n-1}(x)\}.$$

$\because$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(1-x^2)P_n'(x) - (n+1)\{xP_n(x) - P_{n+1}(x)\}\right]t^n$$
$$= \left\{(1-x^2)\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial t}t + \frac{\partial}{\partial t}\right\}F(x,t) \overset{①}{=} 0,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(1-x^2)P_n'(x) + n\{xP_n(x) - P_{n-1}(x)\}\right]t^n$$
$$= \left\{(1-x^2)\frac{\partial}{\partial x} + xt\frac{\partial}{\partial t} - t\frac{\partial}{\partial t}t\right\}F(x,t) \overset{②}{=} 0$$

による：等号①の確認。

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,t) = -\frac{1}{2}\frac{-2t}{(1-2xt+t^2)^{3/2}} = \frac{t}{(1-2xt+t^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}F(x,t) = -\frac{1}{2}\frac{-2x+2t}{(1-2xt+t^2)^{3/2}} = \frac{x-t}{(1-2xt+t^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}tF(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{\sqrt{1-2xt+t^2}}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} - \frac{1}{2}\frac{t(-2x+2t)}{(1-2xt+t^2)^{3/2}}$$
$$= \frac{(1-2xt+t^2)+t(x-t)}{(1-2xt+t^2)^{3/2}} = \frac{1-xt}{(1-2xt+t^2)^{3/2}},$$

$$\left\{(1-x^2)\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial t}t + \frac{\partial}{\partial t}\right\}F(x,t) = \frac{(1-x^2)t - x(1-xt) + (x-t)}{(1-2xt+t^2)^{3/2}} = 0.$$

等号②の確認。

$$\left\{(1-x^2)\frac{\partial}{\partial x} + xt\frac{\partial}{\partial t} - t\frac{\partial}{\partial t}t\right\}F(x,t) = \frac{(1-x^2)t + xt(x-t) - t(1-xt)}{(1-2xt+t^2)^{3/2}} = 0.$$

$\boxtimes$

母関数の導出

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}\pi i}\oint_C \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}dz \quad (C は z=x を囲む複素閉積分路)$$

(Goursatの定理)

を用いる。

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\oint_C \frac{1}{z-x}\left\{\frac{t(z^2-1)}{2(z-x)}\right\}^n dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{1}{z-x}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{t(z^2-1)}{2(z-x)}\right\}^n dz$$

(|t|が十分小さければ、無限和は絶対かつ一様収束するので、和と積分の順序交換可能.)

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{1}{z-x}\left\{1-\frac{t(z^2-1)}{2(z-x)}\right\}^{-1} dz$$

$$= \frac{1}{\pi i}\oint_C \frac{dz}{2(z-x)-t(z^2-1)}$$

$$= \frac{-1}{\pi i}\oint_C \frac{dz}{tz^2-2z+2x-t}$$

$$= \frac{-1}{\pi i}\frac{1}{t}\oint_C \frac{dz}{z^2-\frac{2}{t}z+2\frac{x}{t}-1}$$

被積分関数の分母をzの2次式と見なしたとき、その根は

$$z = z_\pm = \frac{1}{t} \pm \sqrt{\frac{1}{t^2}+1-2\frac{x}{t}} = \frac{1}{t}\left(1 \pm \sqrt{1-2xt+t^2}\right)$$

$$= \frac{1}{t}\left(1+\sqrt{1-2xt+t^2}\right),\ \frac{2x-t}{1+\sqrt{1-2xt+t^2}}.$$

$t\to 0$ のとき、$z_+\to\infty$, $z_-\to 2x$ であるから、(|t|を十分小さくとれば)
z_- はCの内部にあり、z_+ はCの外部にある。よって、留数定理より

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x) = \frac{-2/t}{z_- - z_+} = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}. \qquad \boxtimes$$