Taylor級数展開

n次多項式 $f(x)$ に対して

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

$$=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

(a: const.).

(∵ $f(x)=\sum_{k=0}^{n}c_k(x-a)^k$ とおく。$x=a$ とおいて $c_0=f(a)$ を得る。

$f'(x)=\sum_{k=1}^{n}kc_k(x-a)^{k-1}$, $x=a$ とおいて $c_1=f'(a)$ を得る。 etc. ⊠)

一般の関数 $f(x)$ に対しては (ある条件下で) 次の級数展開が成り立つ:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots \quad (a:\text{const.})$$

… $f(x)$ の $x=a$ における Taylor級数

($x=a$ を中心とする)

とくに $a=0$ の場合

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots$$

… Maclaurin級数

例 (覚えること)

$$e^x=\exp x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots \quad (|x|<\infty)$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots \quad (|x|<\infty)$$

$$\left(\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\right)$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots \quad (|x|<\infty)$$

$$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots \quad (\alpha:\text{const.}),\ (|x|<1),$$

$$\log(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots \quad (|x|<1).$$

(導出)　$f(x)=e^x$ とおくと $f^{(n)}(x)=e^x$, $f^{(n)}(0)=1$ であるから,

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

$f(x)=\cos x$ とおくと, $f'(x)=-\sin x$, $f''(x)=-\cos x$, $f^{(3)}(x)=\sin x$, $f^{(4)}(x)=\cos x$, … より $f'(0)=0$, $f''(0)=-1$, $f^{(3)}(0)=0$, $f^{(4)}(0)=1$, … .

すなわち,

$$f^{(2n)}(0)=(-1)^n,\quad f^{(2n+1)}(0)=0\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

となるから,

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},\qquad \text{etc.}$$

Eulerの公式

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

x の代わりに ix を代入すると,

$$\begin{aligned}
e^{ix}&=1+ix+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^3}{3!}+\frac{(ix)^4}{4!}+\cdots\\
&=1+ix-\frac{x^2}{2!}-i\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+i\frac{x^5}{5!}+\cdots\\
&=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right)+i\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\right)\\
&=\cos x+i\sin x.
\end{aligned}$$

(べき級数は絶対収束するので, 和の順序を変えることができる)

$$\boxed{e^{ix}=\exp(ix)=\cos x+i\sin x.}\qquad \cdots\ \text{Eulerの公式}$$

指数法則 : $e^{ix}e^{iy}=e^{i(x+y)}$.

$$\begin{aligned}
\because\ e^{ix}e^{iy}&=(\cos x+i\sin x)(\cos y+i\sin y)\\
&=(\cos x\cos y-\sin x\sin y)+i(\sin x\cos y+\cos x\sin y)\\
&=\cos(x+y)+i\sin(x+y)\\
&=e^{i(x+y)}.
\end{aligned}$$

複素変数 z に対しては

$$e^z = \exp z \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots$$

で定義とする。

→ 指数法則が成立する: $e^z e^w = e^{z+w}$

$$\because\quad e^z e^w = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{w^l}{l!}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+l=n} \frac{z^k w^l}{k!\,l!}$$

($\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ は絶対収束するので Cauchy の定理が使える)

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k+l=n} \frac{n!}{k!\,l!} z^k w^l$$

($=$ 二項定理 $(z+w)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k}$)

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z+w)^n = e^{z+w}.$$

$\boxtimes$

これより、複素数 $z = x + iy$ ($x = \mathrm{Re}\, z$, $y = \mathrm{Im}\, z$) に対して、

$$e^z = \exp z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

複素数値関数の微積分

複素数値関数 $z(x) = u(x) + i v(x)$ (x: 実変数)

$$z'(x) = \frac{dz(x)}{dx} \equiv u'(x) + i v'(x),$$

$$\int z(x)\,dx \equiv \int u(x)\,dx + i \int v(x)\,dx.$$

$z(x) = e^{\alpha x} = e^{(a+ib)x}$ ($\alpha = a + ib$ 複素定数) に対して、

$$e^{\alpha x} = e^{ax} e^{ibx} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$$

$$(e^{\alpha x})' = (e^{ax} \cos bx)' + i(e^{ax} \sin bx)'$$

$$= a e^{ax} \cos bx - b e^{ax} \sin bx + i(a e^{ax} \sin bx + b e^{ax} \cos bx)$$

$$= (a + ib) e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$$

$$= \alpha e^{ax} e^{ibx} = \alpha e^{\alpha x}$$

$$(e^{\alpha x})' = \alpha e^{\alpha x},$$
$$\int e^{\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}\ (+C)$$
（α：複素数）　（実数値関数の場合の公式がそのまま使える．）

応用：$\int e^{x}\begin{Bmatrix}\cos x\\ \sin x\end{Bmatrix}dx$ の計算

$$\int e^{(1+i)x}\,dx = \int e^{x}\cos x\,dx + i\int e^{x}\sin x\,dx,$$
$$\int e^{(1+i)x}\,dx = \frac{1}{1+i}e^{(1+i)x} = \frac{1-1}{2}e^{x}(\cos x + i\sin x)$$
$$= \frac{1}{2}e^{x}[\cos x + \sin x + i(\sin x - \cos x)].$$

実部をとって $\int e^{x}\cos x\,dx = \frac{1}{2}e^{x}(\cos x + \sin x)$,

虚部をとって $\int e^{x}\sin x\,dx = \frac{1}{2}e^{x}(\sin x - \cos x)$.

<いろいろな計算>

1° $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}x^{n} = 1 - x + x^{2} - x^{3} + \cdots \quad (|x|<1)$.

∴ $\frac{1}{1+x^{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}x^{2n} = 1 - x^{2} + x^{4} - x^{6} + \cdots \quad (|x|<1)$.

項別積分（$|x|<1$）
$$\int_{0}^{x}\frac{d\xi}{1+\xi^{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\int_{0}^{x}\xi^{2n}\,d\xi = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n+1}x^{n}.$$

左辺 $= \arctan x$（$\tan x$ の逆関数）

∴ $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n+1}x^{2n+1} = x - \frac{x^{3}}{3} + \frac{x^{5}}{5} - \frac{x^{7}}{7} + \cdots \quad (|x|<1)$

$x = 1/\sqrt{3}$ を代入すると，
$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n+1}3^{-n},$$
∴ $\pi = 2\sqrt{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}3^{-n}}{2n+1} = 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{3^{2}\cdot 5} - \frac{1}{3^{3}\cdot 7} + \cdots\right).$

2° 第1種完全楕円積分

$$K(k) \equiv \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \quad (|k|<1).$$

$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}(-x) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(-x)^2 + \frac{1}{3!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)(-x)^3 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \cdots,$$

$$\therefore (1-x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n \quad (|x|<1).$$

ここで、

$$\left.\begin{aligned} &0!! = (-1)!! = 1, \\ &(2n)!! = 2n(2n-2)(2n-4)\cdots 4\cdot 2, \\ &(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 3\cdot 1 \end{aligned}\right\} (n=1,2,\cdots).$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \sin^{2n}\theta.$$

右辺は絶対かつ一様収束するので、項別積分可能である

$$K(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}\theta \, d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right\}^2 \frac{\pi}{2} k^{2n}$$

$$\left(\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}\theta \, d\theta = \frac{\pi}{2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{(2n)(2n-2)\cdots 4\cdot 2} \right)$$

$$\therefore K(\theta) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

$$= \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right\}^2 k^{2n}$$

$$= \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\right)^2 k^4 + \left(\frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}\right)^2 k^6 + \cdots \right\} \quad (|k|<1)$$

<Taylor級数展開が可能なことの証明>

Taylorの定理

$f(x)$: 区間 $[a_0, b_0]$ $(-\infty < a_0 < b_0 < +\infty)$ で C^n 級な実数値関数

$a \in [a_0, b_0)$: 任意にとって固定

$\Downarrow$

任意の $x \in (a, b_0]$ に対しある $\theta = \theta_x$ $(a < \theta_x < x)$ が存在して

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x), \quad R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\theta)}{n!}(x-a)^n.$$

□

(証明) 次の定理を用いる。

<Cauchyの平均値定理>

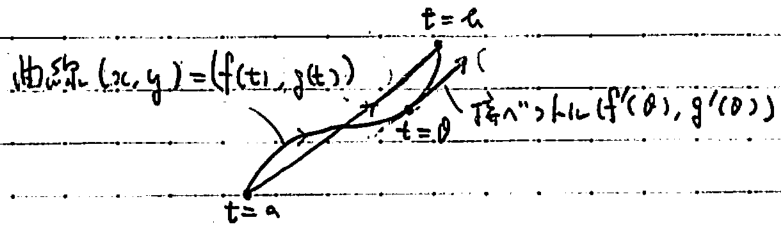
$f(x), g(x)$: 区間 $[a, b]$ で C^1 級

$g(a) \neq g(b)$, f' と g' は (a, b) で同時に 0 にならない

$\Downarrow$

$$\exists \theta \in (a, b) \ \text{s.t.} \ \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\theta)}{g'(\theta)}$$

□



Taylorの定理の証明に戻る。 $\xi \in [a, x]$

$$\varphi(\xi) = f(\xi) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(\xi - a)^k,$$

$$\psi(\xi) = (\xi - a)^n$$

とおくと、$\varphi(\xi)$, $\psi(\xi)$ は区間 $[a, x]$ で C^1 級、$\psi(a) \neq \psi(x)$,
$\varphi'(\xi)$, $\psi'(\xi)$ は (a, x) で同時に 0 にならないから、Cauchyの平均値の定理より

$$\exists \xi_1 \in (a, x) \ \text{s.t.} \ \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\psi(x) - \psi(a)} = \frac{\varphi(x)}{(x-a)^n} = \frac{\varphi'(\xi_1)}{\psi'(\xi_1)} = \frac{\varphi'(\xi_1)}{n(\xi_1 - a)^{n-1}}$$

$\varphi'(\xi)$ と $\psi'(\xi)$ は $(a, \xi_1]$ で C^1 級、$\psi'(a) \neq \psi'(\xi_1)$, $\varphi'(\xi)$, $\psi'(\xi) = n(\xi - a)^{n-1}$ は (a, ξ_1) で同時に 0 にならないから、Cauchyの平均値の定理より

$$\exists \xi_2 \in (a, \xi_1) \ \text{s.t.} \ \frac{\varphi'(\xi_1) - \varphi'(a)}{\psi'(\xi_1) - \psi'(a)} = \frac{\varphi'(\xi_1)}{n(\xi_1 - a)^{n-1}} = \frac{\varphi''(\xi_2)}{\psi''(\xi_2)} = \frac{\varphi''(\xi_2)}{n(n-1)(\xi_2 - a)^{n-2}}.$$

以下同様にして

$\exists \xi_3 \in (a, \xi_2)$ s.t. $\dfrac{\varphi''(\xi_2)}{n(n-1)(\xi_2-a)^{n-2}} = \dfrac{\varphi'''(\xi_3)}{n(n-1)(n-2)(\xi_3-a)^{n-3}}$

$\exists \xi_4 \in (a, \xi_3)$ s.t. $\dfrac{\varphi'''(\xi_3)}{n(n-1)(n-2)(\xi_3-a)^{n-3}} = \dfrac{\varphi^{(4)}(\xi_4)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(\xi_4-a)^{n-4}}$,

....

$\exists \xi_n \in (a, \xi_{n-1})$ s.t. $\dfrac{\varphi^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{(n-1)!(\xi_{n-1}-a)} = \dfrac{\varphi^{(n)}(\xi_n)}{n!}$

上の式より

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n} = \frac{\varphi^{(n)}(\xi_n)}{n!}, \text{ i.e., } f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{\varphi^{(n)}(\xi_n)}{n!}(x-a)^n.$$

$a < \xi_n < a$ であるから、Taylorの定理が証明された。 ☒

* Cauchyの平均値定理の証明.

$\varphi(x) = (g(b)-g(a))f(x) - (f(b)-f(a))g(x)$

とおくと、$\varphi(x)$ は $[a, b]$ で C^1級、$\varphi(a) = \varphi(b) = f(a)g(b) - f(b)g(a)$

であるから、Rolleの定理より $\exists \theta \in (a, b)$ s.t. $\varphi'(\theta) = 0$.

これを書き直すと、$\dfrac{f'(\theta)}{g'(\theta)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ を得る。 ☒

定義　$f(x)$ は $x=a$ で Taylor展開可能 or 解析的 である

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ (収束半径 $R>0$) が存在して，

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \quad (|x-a|<R) \quad \text{——①}$$

が成り立つ．□

$f(x)$ が $x=a$ で Taylor展開可能なら，①の両辺を微分して（冪級数は項別微分可能）$x=a$ とおくことにより，

$a_0 = f(a)$，$a_1 = f'(a)$，$a_2 = \frac{1}{2} f''(a)$，$a_3 = \frac{1}{3!} f'''(a)$，…

がわかる．よって，

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) (x-a)^n \quad (|x-a|<R).$$

$\Downarrow$

$f(x)$ の $x=a$ における Taylor展開の一意性．

〈Taylor展開可能なための十分条件〉

定理　$f(x)$ は $|x-a|<R$ で C^∞ 級，

$|x-a|<R$ における連続関数 $g(x)$ が存在して，

$$|f^{(n)}(a)| \leq g(x) \quad (|x-a|<R,\ n=1,2,\cdots).$$

$\Downarrow$

$f(x)$ は $x=a$ で Taylor展開可能で

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \quad (|x-a|<R). \quad \text{——①}$$

□

$\because$ Taylorの定理より

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(x), \\ R_n(x) &= \frac{1}{n!} f^{(n)}(a+\theta_x(x-a))(x-a)^n \quad (0<\theta_x<1) \end{aligned}\right\} (|x-a|<R) \quad \text{——②}$$

$M = \max\{ g(t) \mid |t-a| \leq |x-a| \}$ とおくと，

$$|R_n(x)| \leq \frac{M R^n}{n!} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

が成立するから，②で $n \to \infty$ とすることより①を得る．⊠

例) $f(x)=e^x$ の場合、$g(x)=e^x$ とおけばよい。
$f(x)=\sin x,\ \cos x$ の場合、$g(x)=1$ とおけばよい。

$\Downarrow$

$e^x,\ \sin x,\ \cos x$ は任意の $x\in\mathbb{R}$ でTaylor展開可能である
($R=\infty$ となる)。

$f(x)=\log(1+x)$ に対してはこの定理は使えない。

$$\left(f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^{n-1}}\right).$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad (|x|<1)$$

の両辺を項別積分して、

$$\log(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \quad (|x|<1),$$

∴ $\log(1+x)$ は $x=0$ でTaylor展開可能である。

< $(1+x)^\alpha$ ($\alpha\in\mathbb{R}$ const.) のTaylor展開可能性 >

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n \quad (|x|<1)$$

とおく。両辺を項別微分して、

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}x^n,$$

$$(1+x)f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}x^{n+1}$$

$$=\alpha+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^n$$

$$=\alpha+\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

$$=\alpha f(x),$$

∴ $(1+x)f'(x)=\alpha f(x)$,

$\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{\alpha}{1+x}$, つまり; $\dfrac{d}{dx}\log f(x) = \dfrac{d}{dx}\alpha \log(1+x)$,

$\log f(x) = \log(1+x)^\alpha + c \quad (c : \text{const.})$

$f(x) = C(1+x)^\alpha \quad (C = \pm e^c)$.

これに $x=0$ とおくと, $1 = C$ を得るから $f(x) = (1+x)^\alpha$.

以上より 次の Taylor 級数展開を得る:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad (|x|<1).$$

$\therefore$ $f(x) = (1+x)^\alpha$ は $x=0$ で Taylor 展開可能である.

Abelの定理.

Abelの定理

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ : 収束半径 } 1 \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ は収束する.}\end{array}\right\} \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

□

証明) 必要なら a_0 に定数を足して $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0$ としてよい. よって, 証明すべきことは,

$$\lim_{x\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

である. $\displaystyle S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ とおくと, $a_n = S_n - S_{n-1}$ $(n \geqq 1)$, $a_0 = S_0$. よって,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} a_n x^n &= S_0 + \sum_{n=1}^{N} (S_n - S_{n-1}) x^n \\ &= S_0 + \sum_{n=1}^{N} S_n x^n - \sum_{n=1}^{N} S_{n-1} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{N} S_n x^n - x \sum_{n=0}^{N-1} S_n x^n \\ &= (1-x) \sum_{n=0}^{N} S_n x^n + S_N x^N\end{aligned}$$

$\displaystyle S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n \to 0$ $(N \to \infty)$ より $\displaystyle\lim_{N\to\infty} S_N x^N = 0$ であるから,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n \\ &= (1-x) \sum_{n=0}^{M} S_n x^n + (1-x) \sum_{n=M+1}^{\infty} S_n x^n .\end{aligned}$$

$S_N \to 0$ $(N \to \infty)$ より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し M を十分大きくとると $|S_n| < \varepsilon$ $(n > M)$ であるから,

$$\left| \sum_{n=M+1}^{\infty} S_n x^n \right| \leqq \varepsilon \sum_{n=M+1}^{\infty} |x|^n = \varepsilon \frac{|x|^{M+1}}{1-|x|} < \frac{\varepsilon}{1-x} \quad (0<x<1) .$$

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right| \leqq (1-x) \left| \sum_{n=0}^{M} S_n x^n \right| + \varepsilon .$$

$x \to 1-0$ とすると, $\displaystyle\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right| \leqq \varepsilon$.

$\varepsilon > 0$ は任意なので, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$ を得る. ☒

（Abelの定理）

＜応用例＞

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots = \log 2,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{2n+1} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots = \frac{\pi}{4},$$

$\because$ $$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n} x^{n} \quad (|x|<1).$$

Leibnizの定理より $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ は収束. よって、Abelの定理より

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \lim_{x \to 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{n} = \lim_{x \to 1-0} \log(1+x) = \log 2.$$

$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ $(|x|<1)$ の両辺を項別積分して、

$$\arctan x = \int_0^x \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (|x|<1).$$

Leibnizの定理より $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ は収束. よって、Abelの定理より

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{x \to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \lim_{x \to 1-0} \arctan x$$

$$= \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

∎