応用解析学特論

3章　変分法（発展編）

自由境界問題

問題　汎関数

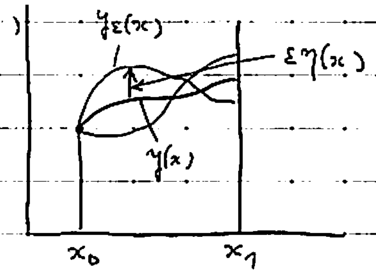
$$I[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$$

を境界条件

$$y(x_0) = y_0$$

のもとで最小にする関数 $y(x)$ を求めよ。

$x = x_0$ における境界条件は課さない



$y(x)$ ：解

$y_\varepsilon(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x)$ ：比較関数

$\eta(x)$ ：任意関数，ただし

$$\eta(x_0) = 0 \quad \text{——①}$$

（$x = x_1$ における制約はなし）

$\tilde{I}(\varepsilon) \equiv I[y_\varepsilon]$ は $\varepsilon = 0$ で最小となるから $\tilde{I}'(0) = 0$.

$$\tilde{I}'(\varepsilon) = \frac{d}{d\varepsilon}\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_\varepsilon, y_\varepsilon')\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial\varepsilon} F(x, y_\varepsilon, y_\varepsilon')\,dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial\varepsilon}\frac{\partial F}{\partial y_\varepsilon} + \frac{\partial y_\varepsilon'}{\partial\varepsilon}\frac{\partial F}{\partial y_\varepsilon'}\right)dx = \int_{x_0}^{x_1}\left(\eta\frac{\partial F}{\partial y_\varepsilon} + \eta'\frac{\partial F}{\partial y_\varepsilon'}\right)dx,$$

$$\tilde{I}'(0) = \underbrace{\int_{x_0}^{x_1}\left(\eta\frac{\partial F}{\partial y} + \eta'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)dx}_{\parallel} = 0$$

部分積分により $\displaystyle \left[\eta\frac{\partial F}{\partial y'}\right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1}\eta\left\{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right\}dx$

$\eta(x_0) = 0$ により

$$\eta(x_1)\frac{\partial F}{\partial y'}\bigg|_{x=x_1} + \int_{x_0}^{x_1}\eta\left\{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right\}dx = 0$$

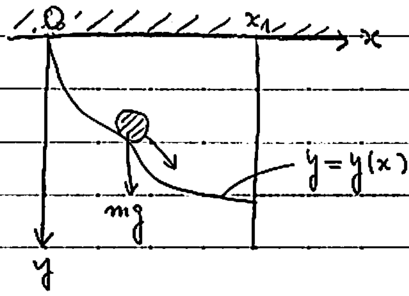
これが①を満たす任意の $\eta(x)$ に対して成り立つから，

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0,$$ …… Euler-Lagrange 方程式
従来と変わらない

$$y(x_0) = y_0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'}\bigg|_{x=x_1} = 0$$ …… 自由境界条件

例（最急降下線）



$x = x_0$ から $x = x_1$ へ到達する時間が最小となるような経路 $y = y(x)$ を求めよ。

$y(0) = 0$

（$y(x_1)$ には制約を課さない）

とする。

(解) 解くべき変分問題は汎関数

$$I[y] = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}\, dy$$

を最小にする関数 $y(x)$ で境界条件 $x(0) = 0$ を満たすものを求めよ。

Euler-Lagrange 方程式の解

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases} \quad (a : \text{const.})$$

これは境界条件 $y(x=0) = 0$ を満たす。

$x = x_1$ における自由境界条件

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=x_1} = \left.\frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}\right|_{x=x_1} = 0,$$

$$\therefore \quad y'(x=x_1) = 0$$

が課される。

$\frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta$ より、$y'(x=x_1) = 0$ となる $x = x_1$ に対応するパラメータ θ の値は $\theta = \pi$ である。したがって、定数 a は

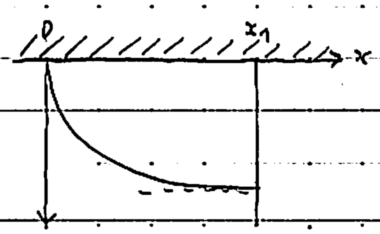
$$x(\pi) = a\pi = x_1, \qquad \therefore \quad a = \frac{x_1}{\pi}.$$

ゆえに解は

$$x(\theta) = \frac{x_1}{\pi}(\theta - \sin\theta), \quad y(\theta) = \frac{x_1}{\pi}(1 - \cos\theta)$$

である。

最終地点でサイクロイド曲線は水平に滑り込む。



<高階導関数を含む場合>

問題　汎関数

$$I[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'')\, dx$$

と境界条件

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0^{(1)}$$

のもとで最小にする関数 $y(x)$ を求めよ。 □

$y(x)$: 解

$y_\varepsilon(x) = y(x) + \varepsilon \eta(x)$: 比較関数,

$\eta(x)$: 任意関数, ただし, $\eta(x_0) = \eta'(x_0) = 0$.

$\tilde{I}(\varepsilon) = I[y_\varepsilon]$ は $\varepsilon = 0$ で最小となるので $\tilde{I}'(0) = 0$.

$$\tilde{I}'(\varepsilon) = \frac{d}{d\varepsilon}\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_\varepsilon, y'_\varepsilon, y''_\varepsilon)\, dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} F(x, y_\varepsilon, y'_\varepsilon, y''_\varepsilon)\, dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1}\left(\eta \frac{\partial F}{\partial y_\varepsilon} + \eta' \frac{\partial F}{\partial y'_\varepsilon} + \eta'' \frac{\partial F}{\partial y''_\varepsilon}\right) dx,$$

$$0 = \tilde{I}'(0) = \int_{x_0}^{x_1}\left(\eta \frac{\partial F}{\partial y} + \underbrace{\eta' \frac{\partial F}{\partial y'} + \eta'' \frac{\partial F}{\partial y''}}_{\text{部分積分}}\right) dx$$

$$= \left[\eta \frac{\partial F}{\partial y'} + \eta' \frac{\partial F}{\partial y''}\right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1}\left[\eta\left\{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right\} - \eta' \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\right] dx$$

$$= \eta(x_1) \left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x_1} + \eta'(x_1) \left.\frac{\partial F}{\partial y''}\right|_{x_1} - \left[\eta \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\right]_{x_0}^{x_1}$$

$$+ \int_{x_0}^{x_1} \eta \left\{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\right\} dx,$$

$$\therefore\ \eta(x_1)\left[\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\right]_{x_1} + \eta'(x_1) \left.\frac{\partial F}{\partial y''}\right|_{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \eta \left\{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\right\} dx = 0.$$

これが任意の $\eta(x)$ に対して成り立つから,

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) = 0,$$ …… Euler-Lagrange 方程式
（従来と同じ）

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0^{(1)},$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\right]_{x_1} = 0, \quad \left.\frac{\partial F}{\partial y''}\right|_{x_1} = 0$$ …… ~~横断性条件~~

横断性条件

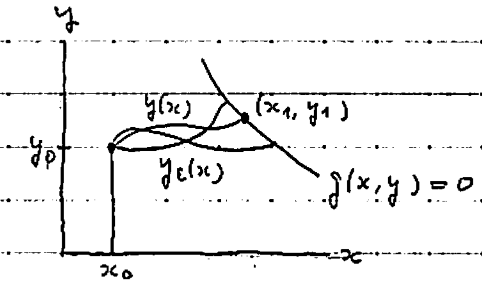
問題　汎関数

$$I[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$$

を境界条件

$$y(x_0) = y_0, \quad g(x_1, y_1) = 0 \quad (y_1 = y(x_1))$$

のもとで最小にする関数 $y(x)$ を求めよ。　□



$y(x)$：解

$y_\varepsilon(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x)$：比較関数

ただし、$\eta(x_0) = 0$,

$g(x_1(\varepsilon), y_1(\varepsilon)) = 0$

* (x_1, y_1) は ε の関数なので、$(x_1(\varepsilon), y_1(\varepsilon))$ と記した。

$\tilde{I}(\varepsilon) \equiv \int_{x_0}^{x_1(\varepsilon)} F(x, y_\varepsilon, y_\varepsilon')\,dx$ は $\varepsilon = 0$ で最小となるので、$\tilde{I}'(0) = 0$.

$$\tilde{I}'(\varepsilon) = \frac{dx_1(\varepsilon)}{d\varepsilon} F(x_1(\varepsilon), y_1(x_1(\varepsilon)), y_1'(x_1(\varepsilon))) + \int_{x_0}^{x_1} \underbrace{\frac{\partial}{\partial\varepsilon} F(x, y_\varepsilon, y_\varepsilon')}_{\eta\frac{\partial F}{\partial y_\varepsilon} + \eta'\frac{\partial F}{\partial y_\varepsilon'}}\,dx,$$

$$\tilde{I}'(0) = \frac{dx_1}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} F(x_1, y_1, y_1') + \left[\eta\frac{\partial F}{\partial y'}\right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \eta\left\{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right\}dx$$

$$= \underbrace{\frac{dx_1}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}}_{\text{この表式が欲しい}} F(x_1, y_1, y_1') + \eta(x_1)\frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x=x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \eta\left\{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right\}dx = 0. \quad \text{——①}$$

$$g(x_1(\varepsilon), y_1(\varepsilon)) = g(x_1(\varepsilon), y(x_1(\varepsilon)) + \varepsilon\eta(x_1(\varepsilon))) = 0$$

の両辺を ε で微分して、

$$0 = \frac{dx_1}{d\varepsilon} g_x(x_1(\varepsilon), y(x_1(\varepsilon)) + \varepsilon\eta(x_1(\varepsilon))) \quad \left(* \; g_x = \frac{\partial g}{\partial x},\; g_y = \frac{\partial g}{\partial y}\right)$$

$$+ \left\{\frac{dx_1}{d\varepsilon} y'(x_1(\varepsilon)) + \eta(x_1(\varepsilon)) + \varepsilon\frac{dx_1}{d\varepsilon}\eta'(x_1(\varepsilon))\right\} g_y(x_1(\varepsilon), y(x_1(\varepsilon)) + \varepsilon\eta(x_1(\varepsilon))),$$

$\varepsilon = 0$ とおいて、

$$x_1'(0)\, g_x(x_1, y_1) + \{x_1'(0)\, y'(x_1) + \eta(x_1)\}\, g_y(x_1, y_1) = 0,$$

$$\therefore\; x_1'(0) = -\eta(x_1)\left[\frac{g_y}{g_x + y' g_y}\right]_{P_1} \quad (P_1 = (x_1, y_1)).$$

これを①に代入して、

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{g_y F}{g_x + y' g_y}\right]_{P_1}\eta(x_1) + \int_{x_0}^{x_1}\eta\left\{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right\}dx = 0.$$

これが任意の $\eta(x)$ に対して成り立つから、

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0,$$ Euler-Lagrange 方程式
(これは従来と同じ)

$$y(x_0) = y_0,$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{g_y F}{g_x + y' g_y}\right]_{P_1} = 0 \quad (P_1 = (x_1, y_1))$$ …… 横断性条件

例) 点 $P_0(x_0, y_0)$ と曲線 $g(x, y) = 0$ 上の点を結ぶ曲線で長さが最小のものを求めよ。

(解) 題意の問題を変分問題に書き直すと次のようになる：
汎関数

$$I[y] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

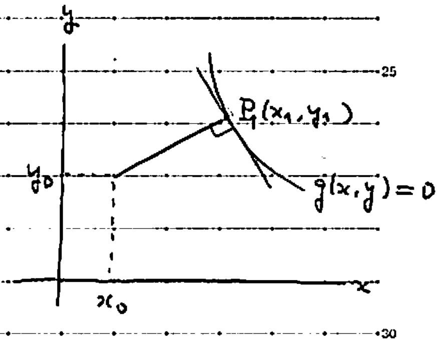
と境界条件

$$y(x_0) = y_0, \quad g(x_1, y_1) = 0 \quad (y_1 = y(x_1))$$

のもとで最小にする関数 $y(x)$ を求めよ。

Euler-Lagrange 方程式の解は $y(x) = c_0 + c_1 x$ $(c_0, c_1 : \text{const.})$.

横断性条件は $F = \sqrt{1 + y'^2}$ より



$$\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{g_y F}{g_x + y' g_y} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} - \frac{g_y\sqrt{1 + y'^2}}{g_x + y' g_y} = 0,$$

$$y'(g_x + y' g_y) - g_y(1 + y'^2) = y' g_x - g_y = 0$$

$$\therefore \quad y' g_x - g_y = 0 \quad \text{at } P_1 = (x_1, y_1).$$

これは、解曲線(直線) $y = c_0 + c_1 x$ が曲線 $g(x, y) = 0$ と直交することを示す。 ☒

応用解析学特論

等周問題 〜制約条件つき変分問題〜

<復習：Lagrange未定乗数法>

問題1　関数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ を制約条件

$$g(x_1, \cdots, x_n) = 0$$

のもとで最小化するような点 $(x_1, \cdots, x_n)$ を求めよ。□

$(x_1^*, \cdots, x_n^*)$：解
$(x_1^* + \delta x_1, \cdots, x_n^* + \delta x_n)$：解から微小にずれた点　｝両者は制約条件 $g = 0$ を満たす。

$$\delta f(x_1^*, \cdots, x_n^*) = f(x_1^* + \delta x_1, \cdots, x_n^* + \delta x_n) - f(x_1^*, \cdots, x_n^*)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \delta x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*, \cdots, x_n^*) = 0. \quad \text{—①}$$

$$\delta g(x_1^*, \cdots, x_n^*) = g(x_1^* + \delta x_1, \cdots, x_n^* + \delta x_n) - g(x_1^*, \cdots, x_n^*)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \delta x_i \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1^*, \cdots, x_n^*) = 0 \quad \text{—②}$$

②をみたす任意の微小変化 $(\delta x_1, \cdots, \delta x_n)$ に対し①が成立することは、勾配ベクトル $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_{P^*}$ $(P^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*))$ は勾配ベクトル $\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial g}{\partial x_n}\right)_{P^*}$ と平行ということである。ゆえに、ある定数 λ が存在し、

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0, \quad \cdots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n} = 0 \quad \text{at } P^*. \quad \square$$

問題2　関数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ を制約条件

$$g_1(x_1, \cdots, x_n) = 0, \quad \cdots, \quad g_m(x_1, \cdots, x_n) = 0$$

のもとで最小化するような点 $(x_1, \cdots, x_n)$ を求めよ。

$(x_1^*, \cdots, x_n^*)$ 解
$(x_1^* + \delta x_1, \cdots, x_n^* + \delta x_n^*)$ 解から微小にずれた点。

$$\begin{cases} \delta f\big|_{P^*} = \sum_{i=1}^{n} \delta x_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{P^*} = 0, & \text{—①} \\ \delta g_j\big|_{P^*} = \sum_{i=1}^{n} \delta x_i \left(\frac{\partial g_j}{\partial x_i}\right)_{P^*} = 0 \quad (j = 1, \cdots, m). & \text{—②} \end{cases}$$

（等周問題）

② をみたす任意の微小変位 $(\delta x_1, \cdots, \delta x_n)$ に対して ① が成り立つ。

$\Longleftrightarrow$ $\mathrm{span}\{(\nabla g_1)_{P^*}, \cdots, (\nabla g_m)_{P^*}\} = \{c_1(\nabla g_1)_{P^*} + \cdots + c_m(\nabla g_m)_{P^*} \mid c_1, \cdots, c_m \in \mathbb{R}\}$

$\left(\nabla g_j = \left(\frac{\partial g_j}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial g_j}{\partial x_n} \right) \right)$

の直交補空間 $\mathrm{span}\{(\nabla g_1)_{P^*}, \cdots, (\nabla g_m)_{P^*}\}^{\perp}$ に属する任意の $(\delta x_1, \cdots, \delta x_n)$ に対して ① が成り立つ。

$\Longleftrightarrow$ $(\nabla f)_{P^*} \in \mathrm{span}\{(\nabla g_1)_{P^*}, \cdots, (\nabla g_m)_{P^*}\}$

$\Longleftrightarrow$ ある定数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ が存在して、

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_1} = 0, \\ &\cdots \\ &\frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_n} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_n} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ ： Lagrange 未定乗数

制約条件つき最小化問題（問題2）の解法

(1) $h_{\lambda_1 \cdots \lambda_m}(x_1, \cdots, x_n) \equiv f(x_1, \cdots, x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x_1, \cdots, x_n)$

$(\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ ： Lagrange 未定乗数 $)$

の最小化問題の解 $(x_1(\lambda_1, \cdots, \lambda_m), \cdots, x_n(\lambda_1, \cdots, \lambda_m))$ を求める。

(2) 制約条件 $g_j(x_1(\lambda_1, \cdots, \lambda_m), \cdots, x_n(\lambda_1, \cdots, \lambda_m)) = 0 \quad (j = 1, \cdots, m)$

を満たす $(\lambda_1, \cdots, \lambda_m)$ を求め $(\lambda_1^*, \cdots, \lambda_m^*)$ とする。

(3) $(x_1(\lambda_1^*, \cdots, \lambda_m^*), \cdots, x_n(\lambda_1^*, \cdots, \lambda_m^*))$ がもとの問題の解である。

(等周問題)

等周問題 = 制約条件つき変分問題

汎関数

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx$$

を条件

$$K_j[y] = \int_{x_0}^{x_1} G_j(x, y, y')\, dx = C_j \ (\text{const.}), \quad j = 1, \cdots, m$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1$$

のもとで最小にする $y(x)$ を求めよ。 □

$y(x)$: 解.

$y_{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m}(x) = y(x) + \sum_{j=0}^{m} \varepsilon_j \eta_j(x)$: 比較関数

$\eta_0(x), \cdots, \eta_m(x)$: 任意関数, ただし, $\eta_j(x_0) = \eta_j(x_1) = 0$ $(j = 0, \cdots, m)$.

$\tilde{I}(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m) \equiv I[y_{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m}]$,

$\tilde{J}_j(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m) \equiv J_j[y_{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m}] - C_j \quad (j = 1, \cdots, m)$

とおくと, 制約条件つき最小化問題

$$\tilde{I}(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m) \longrightarrow \min$$

s.t.

$$\tilde{J}_j(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m) = 0 \quad (j = 1, \cdots, m)$$

の解が $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m) = (0, 0, \cdots, 0)$ である.

$$\tilde{K}_{\lambda_1 \cdots \lambda_m}(\varepsilon_0, \cdots, \varepsilon_m) \equiv \tilde{I}(\varepsilon_0, \cdots, \varepsilon_m) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \tilde{J}_j(\varepsilon_0, \cdots, \varepsilon_m)$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \underbrace{\left\{ F(x, y, y') + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j G_j(x, y, y') \right\}}_{\parallel} dx - \sum_{j=1}^{m} C_j$$

$(\lambda_1, \cdots, \lambda_m$: Lagrange未定乗数$)$ $H_{\lambda_1 \cdots \lambda_m}(x, y, y')$ とおく.

とおくと,

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_k} \tilde{K}_{\lambda_1 \cdots \lambda_m}(\varepsilon_0, \cdots, \varepsilon_m) \Big|_{(\varepsilon_0, \cdots, \varepsilon_m) = (0, \cdots, 0)}$$

$$= \underbrace{\left[\frac{\partial H_{\lambda_1 \cdots \lambda_m}}{\partial y'} \eta_k \right]_{x_0}^{x_1}}_{0} + \int_{x_0}^{x_1} \eta_k \left\{ \frac{\partial H_{\lambda_1 \cdots \lambda_m}}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial H_{\lambda_1 \cdots \lambda_m}}{\partial y'} \right) \right\} dx = 0 \quad \text{—} (\#)$$

$(k = 0, \cdots, m)$,

（等周問題）

(#) が（任意の $\eta_0(x), \cdots, \eta_m(x)$ に対して成り立つから、

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H_{\lambda_1\cdots\lambda_m}}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial H_{\lambda_1\cdots\lambda_m}}{\partial y'}\right) = 0 \quad (\text{Euler-Lagrange 方程式}). \\ y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1 \end{cases}$$

$\Downarrow$

解 $y(x; \lambda_1, \cdots, \lambda_m)$

制約条件

$$J_j[y(x; \lambda_1, \cdots, \lambda_m)] = C_j \quad (j = 1, \cdots, m)$$

から $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ を決定。$\rightarrow (\lambda_1, \cdots, \lambda_m) = (\lambda_1^*, \cdots, \lambda_m^*)$.

$\therefore$ $y(x; \lambda_1^*, \cdots, \lambda_m^*)$ が最終的な解である。

例題（これが"等周問題"の語源）

極座標表示された平面曲線 $r = r(\theta)$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ を考える。ただし、$r(0) = r(\pi) = 0$ とする。曲線の全長が一定という条件

$$J[r] = \int_0^\pi \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta = L \ (\text{const.})$$

のもとで、曲線が囲む領域の面積

$$I[r] = \int_0^\pi \frac{1}{2} r^2\, d\theta$$

が最大となる $r(\theta)$ を求めよ。 □

（解） $F = r^2$, $G = \sqrt{r^2 + r'^2}$ とおくと、問題の解は λ を Lagrange 未定乗数として、Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{\partial}{\partial r}(F + \lambda G) - \frac{\partial}{\partial r'}(F + \lambda G) = 0$$

を満たす。いまの場合、$F + \lambda G$ は θ を陽に含まないので、Euler-Lagrange 方程式の第1積分は一定である。

$$(F + \lambda G) - r' \frac{\partial}{\partial r'}(F + \lambda G) = c \ (\text{const.}).$$

ただし $= (r^2 + \lambda\sqrt{r^2 + r'^2}) - r' \dfrac{\partial}{\partial r'}(r^2 + \lambda\sqrt{r^2 + r'^2})$

$$= r^2 + \lambda\sqrt{r^2 + r'^2} - r' \frac{\lambda r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}} = r^2\left(1 + \frac{\lambda}{\sqrt{r^2 + r'^2}}\right) = c.$$

(等周問題)

$r(0) = r(\pi) = 0$ より $c = 0$.

$$1 + \frac{\lambda}{\sqrt{r^2 + r'^2}} = 0 \quad \therefore \ r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \lambda^2$$

$$\int \frac{dr}{\sqrt{\lambda^2 - r^2}} = \pm \int d\theta = \pm(\theta + A) \quad (A : \text{const.}).$$

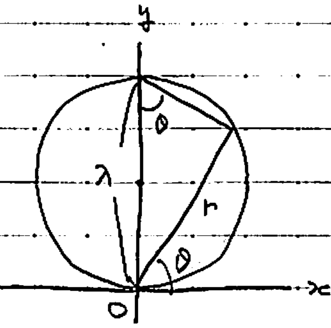
$$\text{左辺} = \int \frac{d(r/\lambda)}{\sqrt{1 - (r/\lambda)^2}} = \arcsin\left(\frac{r}{\lambda}\right)$$

より、

$$r = (\pm)\lambda \sin(\theta + A).$$

$r(0) = 0$ より $A = 0$, $r(\theta) = \lambda \sin\theta$.

これは右図のような円を表す。



周長 $= \pi\lambda = L$ より $\lambda = \frac{L}{\pi}$.

$$\therefore \ r(\theta) = \frac{L}{\pi} \sin\theta$$

$\boxtimes$