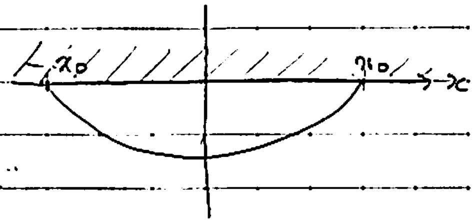
懸垂線(catenary)の問題



一様な紐(長さL)を両端を同じ高さに吊り下げたとき、紐は重力による位置エネルギーが最小になる形をとる。これより紐の形を求めよ。

(解) ρ：紐の単位長さ当りの質量、 g：重力加速度

$y(x)$：紐の形

紐の位置エネルギー $\displaystyle\int \rho g y\, ds = \rho g \int_{-x_0}^{x_0} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$

$\downarrow$

変分問題

$$\text{Minimize} \quad I[y] = \int_{-x_0}^{x_0} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

subject to

$$J[y] = \int_{-x_0}^{x_0} \sqrt{1+y'^2}\,dx = L \quad (\text{紐の長さ}).$$

$$y(-x_0) = y(x_0) = 0.$$

Lagrange未定乗数法

$$\text{Minimize} \quad I[y] + \lambda J[y] = \int_{-a}^{a} \underbrace{\left(y\sqrt{1+y'^2} + \lambda\sqrt{1+y'^2}\right)}_{H_\lambda} dx$$

H_λ は x を陽に含まないので、

$$\text{第1積分} \quad H_\lambda - y'\frac{\partial H_\lambda}{\partial y'} = \text{const.}$$

$$\text{左辺} = (y+\lambda)\sqrt{1+y'^2} - y'\cdot(y+\lambda)\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{y+\lambda}{\sqrt{1+y'^2}} = C\ (\text{const.})$$

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(\frac{y+\lambda}{C}\right)^2, \quad \int \frac{dy}{\sqrt{\{(y+\lambda)/C\}^2 - 1}} = \pm\int dx$$

$y+\lambda = C\cosh z$ とおくと、 $dy = C\sinh z\, dz$.

$$\text{左辺} = \int \frac{C\sinh z}{\sqrt{\cosh^2 z - 1}}\,dz = C\int dz = \pm\int dx,$$

$$Cz = \pm(x+a) \quad (a: \text{const.}),$$

$$\therefore\ y = -\lambda + C\cosh\left(\frac{x+a}{C}\right).$$

定数 λ, C, a は条件 $y(-x_0) = y(x_0) = 0$, $J[y] = L$ より定める.

$y(-x_0) = y(x_0) = 0$ より

$$-\lambda + C\cosh\left(\frac{x_0+a}{c}\right) = -\lambda + C\cosh\left(\frac{-x_0+a}{c}\right)$$

∴ $a = 0$, $\lambda = C\cosh\left(\frac{x_0}{C}\right)$.

$$J[y] = \int_{-x_0}^{x_0} \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_{-x_0}^{x_0} \sqrt{1+\sinh^2\left(\frac{x}{C}\right)}\,dx$$

$$= \int_{-x_0}^{x_0} \cosh\left(\frac{x}{C}\right) dx = \left[C\sinh\left(\frac{x}{C}\right)\right]_{-x_0}^{x_0} = 2C\sinh\left(\frac{x_0}{C}\right) = L.$$

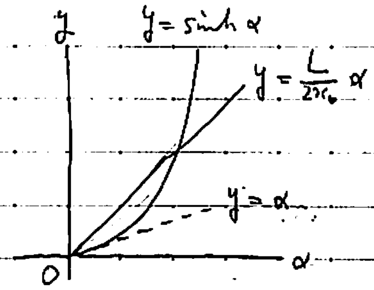
以上より、

$$y(x) = C\left\{\cosh\left(\frac{x}{C}\right) - \cosh\left(\frac{x_0}{C}\right)\right\},$$

ただし、定数 $C>0$ は条件

$$2C\sinh\left(\frac{x_0}{C}\right) = L$$

より定める。



$\alpha = x_0/C$ とおくと、

$$\sinh\alpha = \frac{L}{2x_0}\alpha \quad \text{——①}$$

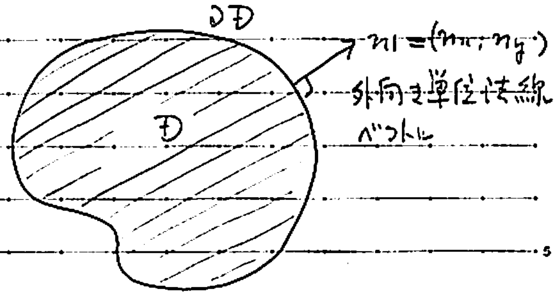
右のグラフより、①を満たす解 α は

$$\frac{L}{2x_0} > 1 \iff L > 2x_0$$

(紐の長さ > 両端の間隔)

のときに存在する。 ☒

多変数関数の場合の変分法



問題　2変数関数 $u=u(x,y)$ を変数にもつ汎関数

$$I[u]=\iint_D F(x,y,u,u_x,u_y)\,dx\,dy \qquad \left(u_x=\frac{\partial u}{\partial x},\ u_y=\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

を境界条件

$$u(x,y)=u_0(x,y) \quad \text{on } \partial D$$

のもとで最小にする関数を求めよ。□

$u(x,y)$：解，

$$u^\varepsilon(x,y)=u(x,y)+\varepsilon\eta(x,y)$$

…比較関数，$\eta(x,y)$ は任意の関数，ただし，

$$\eta(x,y)=0 \quad \text{on } \partial D$$

を満たす。

$\tilde{I}(\varepsilon)\equiv I[u^\varepsilon]$ は $\varepsilon=0$ で最小となるので，$\tilde{I}'(0)=0$.

$$\tilde{I}'(\varepsilon)=\frac{d}{d\varepsilon}\iint_D F(x,y,u^\varepsilon,u_x^\varepsilon,u_y^\varepsilon)\,dx\,dy$$

$$=\iint_D \frac{\partial}{\partial\varepsilon}F(x,y,u^\varepsilon,u_x^\varepsilon,u_y^\varepsilon)\,dx\,dy$$

$$=\iint_D\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial\varepsilon}\frac{\partial F}{\partial u^\varepsilon}+\frac{\partial u_x^\varepsilon}{\partial\varepsilon}\frac{\partial F}{\partial u_x^\varepsilon}+\frac{\partial u_y^\varepsilon}{\partial\varepsilon}\frac{\partial F}{\partial u_y^\varepsilon}\right)dx\,dy$$

$$=\iint_D\left(\eta\frac{\partial F}{\partial u^\varepsilon}+\eta_x\frac{\partial F}{\partial u_x^\varepsilon}+\eta_y\frac{\partial F}{\partial u_y^\varepsilon}\right)dx\,dy,$$

$$0=\tilde{I}'(0)=\iint_D\left(\eta\frac{\partial F}{\partial u}+\eta_x\frac{\partial F}{\partial u_x}+\eta_y\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)dx\,dy$$

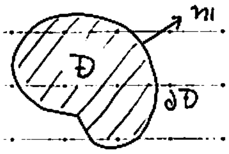
$$=\underbrace{\iint_D\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\frac{\partial F}{\partial u_x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)\right\}dx\,dy}_{\text{Gaussの発散定理を適用}}$$

$$+\iint_D\eta\left\{\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)\right\}dx\,dy$$

$$=\underbrace{\int_{\partial D}\eta\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}n_x+\frac{\partial F}{\partial u_y}n_y\right)dS}_{0\ (\because\ \eta=0\ \text{on}\ \partial D)}+\iint_D\eta\left\{\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)\right\}dx\,dy$$

* Gaussの発散定理(2次元)

$$\iint_D \left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}\right)dx\,dy=\int_{\partial D}(A_x n_x + A_y n_y)\,dS$$



$$\iint_D \eta\left\{\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)\right\}dx\,dy=0$$

for $\forall\eta(x,y)$ s.t. $\eta=0$ on ∂D.

$$\therefore\ \boxed{\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)=0}$$ …… Euler-Lagrange方程式

例題　Minimize $F[u]=\frac{1}{2}\iint_D\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy$ —— ①

subject to $u(x,y)=u_0(x,y)$ on ∂D.

(解) Euler-Lagrange方程式に $F=\frac{1}{2}(u_x^2+u_y^2)$ を代入すると,

$$0=\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)=0-\frac{\partial u_x}{\partial x}-\frac{\partial u_y}{\partial y},$$

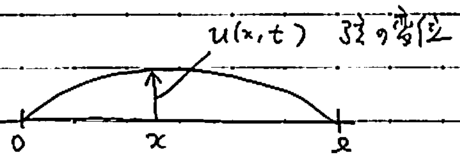
$$\therefore\ \Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$ …… Laplace方程式

$\left(\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\ \cdots\ \text{Laplacian}\right)$

Dirichletの原理

・Laplace方程式 $\Delta u=0$ の解は汎関数 $F[u]=\frac{1}{2}\iint_D\|\nabla u\|^2\,dx\,dy$ $\left(\nabla u=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)$ を最小にする関数 u を求めることによって得られる. □

例題〈1次元の弦の振動〉

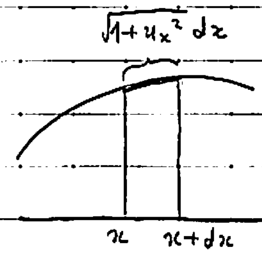


弦の変位 $u(x,t)$ が満たす方程式を求める。

ρ：単位長さあたりの弦の質量
T：弦の張力

微小区間 $[x, x+dx]$ に含まれる弦の微小部分の

運動エネルギー $\frac{\rho}{2}u_t^2\,dx$



位置エネルギー

＝弦の微小部分を張力 T に抗して長さを dx から $\sqrt{1+u_x^2}\,dx$ に伸ばす仕事

$\simeq T\left(\sqrt{1+u_x^2}\,dx - dx\right)$

$\simeq \frac{T}{2}u_x^2\,dx$

($u(x,t)\simeq 0$ として,
$\sqrt{1+u_x^2} = 1+\frac{1}{2}u_x^2 - \frac{1}{8}u_x^4 + \cdots \simeq 1+\frac{1}{2}u_x^2$.)

微小部分の Lagrangian $\left(\frac{\rho}{2}u_t^2 - \frac{T}{2}u_x^2\right)dx$

弦全体の Lagrangian

$$L = \int_0^{\ell} \mathcal{L}\,dx = \int_0^{\ell}\left(\frac{\rho}{2}u_t^2 - \frac{T}{2}u_x^2\right)dx$$

$\left(\mathcal{L} = \frac{\rho}{2}u_t^2 - \frac{T}{2}u_x^2 \ : \text{Lagrangian 密度}\right)$,

作用 $S[u] = \int_{t_0}^{t_1} L\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\int_0^{\ell} \mathcal{L}\,dx\,dt$.

Hamilton の原理 ($S[u] \to$ 停留)

→ Euler-Lagrange 方程式：$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\right) = 0$

$$\therefore\ \boxed{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \left(c=\sqrt{\frac{T}{\rho}}\right)}$$ … 波動方程式
wave equation

$$\begin{cases} F(x) + G'(x) = f'(x) \\ F(x) - G'(x) = -\dfrac{1}{c} g(x) \end{cases}$$

$$\therefore \quad F(x) = \frac{1}{2}\left\{ f'(x) - \frac{1}{c} g(x) \right\}, \quad G'(x) = \frac{1}{2}\left\{ f'(x) + \frac{1}{c} g(x) \right\}$$

$$\rightarrow G(x) = \frac{1}{2}\left\{ f(x) + \frac{1}{c}\int^{x} g(\xi)\,d\xi \right\},$$

$$u(x,t) = \int^{x-ct} \frac{1}{2}\left\{ f'(\xi) - \frac{1}{c} g(\xi) \right\} d\xi + \frac{1}{2}\left\{ f(x+ct) + \frac{1}{c}\int^{x+ct} g(\xi)\,d\xi \right\},$$

$$\therefore \quad u(x,t) = \frac{1}{2}\left\{ f(x-ct) + f(x+ct) \right\} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\,d\xi.$$

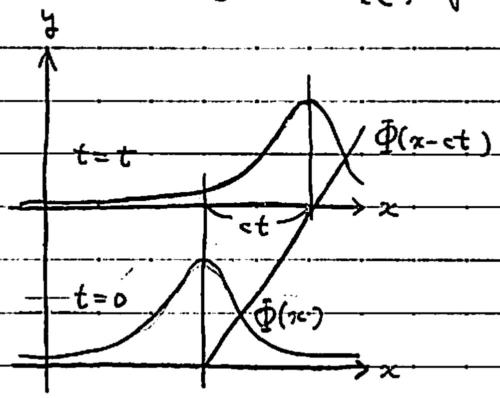
… Stokes の公式

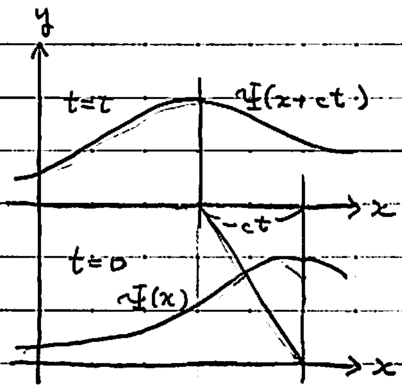
〈物理的意味〉

$$u(x,t) = \Phi(x-ct) + \Psi(x+ct),$$

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{2} f(\xi) - \frac{1}{2c}\int^{\xi} g(\xi')\,d\xi',$$

$$\Psi(\xi) = \frac{1}{2} f(\xi) + \frac{1}{2c}\int^{\xi} g(\xi')\,d\xi'.$$





Φ(x−ct)：速度 c で波形Φが伝播　　Ψ(x+ct)：速度 −c で波形Ψが伝播

波動方程式の初期値境界値問題 ～変数分離法～

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (t>0,\ 0<x<\ell), \\ u(x,t=0)=f(x),\quad u_t(x,t=0)=g(x) & (0<x<\ell), \\ u(x=0,t)=u(x=\ell,t)=0 & (t>0). \end{cases}$$

変数分離された解を仮定する： $u(x,t)=U(x)T(t)$.

波動方程式に代入して、

$$\frac{1}{c^2}U\frac{d^2T}{dt^2} = T\frac{d^2U}{dx^2},$$

$$\underbrace{\frac{1}{c^2}\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2}}_{t\text{のみの関数}} = \underbrace{\frac{1}{U}\frac{d^2U}{dx^2}}_{x\text{のみの関数}}$$

tのみの関数 $=$ xのみの関数 $\longrightarrow$ 両辺 $\equiv$ const. ($=-k^2$ とおく)

$$\begin{cases} \dfrac{d^2T}{dt^2}+c^2k^2T=0 & \text{—①} \\ \dfrac{d^2U}{dx^2}+k^2U=0 & \text{—②} \end{cases}$$

② の一般解： $U(x)=C_1e^{ikx}+C_2e^{-ikx}$ (C_1, C_2 : const.).

境界条件より $U(0)=U(\ell)=0$.

$$\begin{cases} U(0)=C_1+C_2=0 \\ U(\ell)=C_1e^{ik\ell}+C_2e^{-ik\ell}=0 \end{cases}$$ …… C_1, C_2 についての連立一次方程式

自明でない解 $(C_1,C_2)\neq(0,0)$ をもつ条件は、

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{ik\ell} & e^{-ik\ell} \end{vmatrix} = -2i\sin k\ell = 0.$$

$$\therefore\quad k=k_n=\frac{n\pi}{\ell}\quad (n=1,2,\cdots).$$

$$U(x)=U_n(x)=\text{const.}\times\sin k_n x$$

一方、① の一般解は $T(t)=\text{const.}\times e^{ick_nt}+\text{const.}\times e^{-ick_nt}$.

結局、次の形の解を得る：

$$u_n(x,t)=\sin k_nx\left(A_ne^{ick_nt}+B_ne^{-ick_nt}\right)$$

$$\left(k_n=\frac{\pi n}{\ell},\quad n=1,2,\cdots\right).$$

$\to$ $u_n(x,t)=\sin k_nx\left(A_n\cos ck_nt+B_n\sin ck_nt\right)$

$u_n(x,t)$ の一次結合も境界条件を満たす波動方程式の解である。

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin k_n x\,(A_n\cos ck_n t+B_n\sin ck_n t)$$

係数 A_n, B_n は初期条件から決める。

$$u(x,t=0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin k_n x=f(x), \quad ―③$$

$$u_t(x,t=0)=\sum_{n=1}^{\infty}ck_n B_n\sin k_n x=g(x). \quad ―④$$

③の両辺に $\sin k_m x$ を掛けて x について $[0,l]$ で積分すると、

$$\int_0^l\sin k_m x\sin k_n x\,dx=\frac{l}{2}\delta_{mn}$$

より、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l}{2}\delta_{mn}A_n=\frac{l}{2}A_m=\int_0^l f(x)\sin k_m x\,dx, \quad \therefore A_m=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin k_m x\,dx.$$

④の両辺に $\sin k_m x$ を掛けて x について $[0,l]$ で積分すると、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l}{2}\delta_{mn}ck_n B_n=\frac{1}{2}clk_m B_m=\int_0^l g(x)\sin k_m x\,dx,$$

$$\therefore B_m=\frac{2}{clk_m}\int_0^l g(x)\sin k_m x\,dx.$$

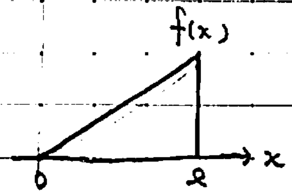
以上より、次の解を得る：

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin k_n x\,(A_n\cos ck_n t+B_n\sin ck_n t);$$

ただし、

$$\left.\begin{aligned}k_n&=\frac{n\pi}{l},\\ A_n&=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin k_n x\,dx,\\ B_n&=\frac{2}{clk_n}\int_0^l g(x)\sin k_n x\,dx\end{aligned}\right\}(n=1,2,\cdots).$$

例　$f(x)=Ax,\quad g(x)=0$ の場合。



$$B_n=0,$$

$$A_n=\frac{2}{l}A\int_0^l x\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx=-\frac{2}{n\pi}\int_0^l x\left\{\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right\}'dx$$

NO. 5

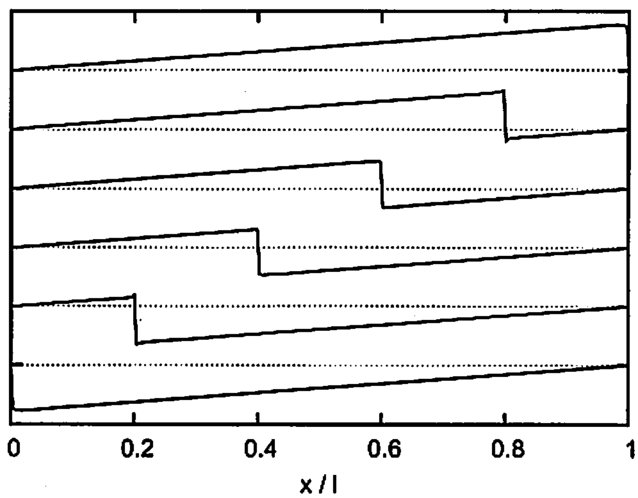
DATE

$$= -\frac{\ell}{n\pi}\left\{\left[x\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\right]_0^{\ell} - \int_0^{\ell}\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx\right\}$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\,\ell(-1)^n + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\ell}\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx$$

$$= \frac{2\ell(-1)^{n-1}}{n\pi}$$

$$\therefore\ u(x,t) = \frac{2\ell}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}ct\right) \quad \text{—①}$$



$ct = 0$

$ct = 0.2\ell$

$ct = 0.4\ell$

$ct = 0.6\ell$

$ct = 0.8\ell$

$ct = \ell$

① のグラフ