佐藤超函数論と数値解析への応用

電気通信大学オープンキャンパス

緒方秀教

電気通信大学大学院　情報理工学研究科　情報・ネットワーク工学専攻

2020 年 7 月 19 日（日）

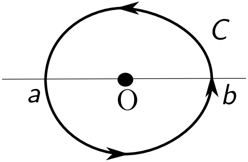
序：佐藤超函数とは…

佐藤超函数：一般化関数を複素解析関数で表現したもの

$$\delta(x) \equiv \left[\frac{-1}{2\pi \mathrm{i} z}\right],$$

$$\int_a^b \delta(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \equiv -\oint_C \frac{-1}{2\pi \mathrm{i} z}\varphi(z)\mathrm{d}z$$

$$= \varphi(0).$$



- 複素解析関数：
  遠くの 2 点における値が密接に結びついている．
- 佐藤超函数の言葉を使って，
  この複素解析関数の性質を数値計算に利用したい．

1. 佐藤超函数論

佐藤超函数論（佐藤幹夫，1958 年）

- 複素関数論に基く一般化関数の理論
- 超函数 ⋯ ある解析関数 $F(z)$ の境界値の差

$$f(x) = [F(z)] \equiv F(x + \mathrm{i}0) - F(x - \mathrm{i}0).$$

- 解析関数 $F(z)$ ⋯ 超函数 $f(x)$ の定義関数

1. 佐藤超函数論：超函数の例

- Dirac のデルタ関数

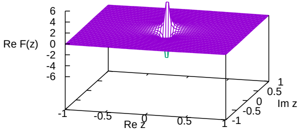
$$\delta(x) = -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left(\frac{1}{x+\mathrm{i}0} - \frac{1}{x-\mathrm{i}0}\right).$$

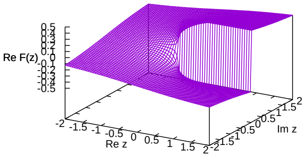
- Heaviside のステップ関数

$$Y(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} = -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left\{\log(-(x+\mathrm{i}0)) - \log(-(x-\mathrm{i}0))\right\}.$$

$\log z$ は主値をとる（$x > 0$ に対し $\log x \in \mathbb{R}$ なる分枝）.

1. 佐藤超函数論





$\delta(x)$ の定義関数

$$F(z) = \frac{-1}{2\pi \mathrm{i} z}$$

$Y(x)$ の定義関数

$$F(z) = \frac{-1}{2\pi \mathrm{i}} \log(-z)$$

$$\text{超函数} \quad f(x) = F(x + \mathrm{i}0) - F(x - \mathrm{i}0),$$

$$F(z) \ : \ \text{定義関数}.$$

1. 佐藤超函数論：超函数の演算

- 線形演算（和とスカラー倍）：
  超函数 $f(x) = [F(z)]$, $g(x) = [G(z)]$ と定数 a, b に対して，

$$\begin{aligned} af(x) + bg(x) &\equiv [aF(z) + bG(z)] \\ &= (aF + bG)(x + \mathrm{i}0) - (aF + bG)(x - \mathrm{i}0). \end{aligned}$$

- 微分（導関数）：超関数 $f(x) = [F(z)]$ に対して，

$$f'(x) \equiv [F'(z)] = F'(x + \mathrm{i}0) - F'(x - \mathrm{i}0).$$

超函数は何回でも微分可能である．

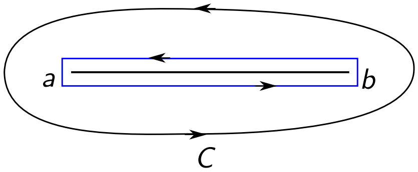
- 超函数 $f(x) = [F(z)]$ と実解析関数 $\varphi(x)$ との掛け算：

$$\varphi(x)f(x) \equiv [\varphi(z)F(z)] = (\varphi F)(x + \mathrm{i}0) - (\varphi F)(x - \mathrm{i}0).$$

1. 佐藤超函数論：超函数の積分

超函数 $f(x) = F(x + \mathrm{i}0) - F(x - \mathrm{i}0)$ の積分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b F(x+\mathrm{i}0) - F(x-\mathrm{i}0)\mathrm{d}x = -\oint_C F(z)\mathrm{d}z,$$



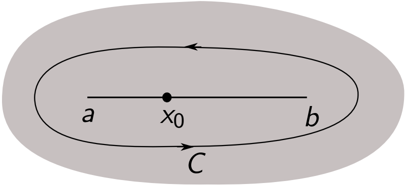
以下，複素積分路は被積分関数が解析的である領域を通るものとする．

1. 佐藤超函数論：Dirac のデルタ関数を含む積分

$$\delta(x-x_0) = \left[-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{1}{z-x_0}\right],$$

$$\int_a^b \varphi(x)\delta(x-x_0)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{\varphi(z)}{z-x_0}\mathrm{d}z = \varphi(x_0).$$

delta 関数の定義を再現している．



2. 佐藤超函数論の数値積分への応用

次の形の積分を考える：

$$\int_a^b \varphi(x)w(x)\mathrm{d}x,$$

$\varphi(x)$ ：$[a,b]$ 上の解析関数

$w(x)$ ：重み関数

$$\int_a^b \varphi(x)w(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\varphi(x)\chi_{(a,b)}(x)w(x)}_{\text{超函数とみなす}}\mathrm{d}x,$$

$$\chi_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 1 & x \in (a,b) \\ 0 & x \notin [a,b]. \end{cases}$$

2. 佐藤超函数論の数値積分への応用

超函数 $\chi_{(a,b)}(x)w(x)$ の標準定義関数

$$W_0(z) \equiv = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\chi_{(a,b)}(x)w(x)}{x-z} \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_a^b \frac{w(x)}{x-z} \mathrm{d}x.$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi(x)\chi_{(a,b)}(x)w(x) = [\varphi(z)W_0(z)]$$

考えている積分は超関数積分の定義より，
つぎのように複素積分表示できる．

$$\int_a^b \varphi(x)w(x)\mathrm{d}x = -\oint_C \varphi(z)W_0(z)\mathrm{d}z,$$

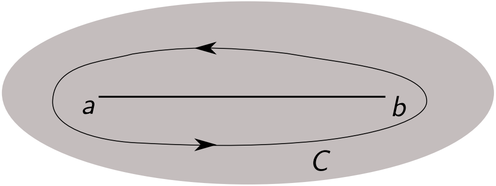
C : $[a, b]$ を正の向きに囲む閉積分路．

2. 佐藤超函数論の数値積分への応用

超函数を用いて，求める積分を複素積分に変換する：

$$\int_a^b \varphi(x)w(x)\mathrm{d}x = -\oint_C \varphi(z)W_0(z)\mathrm{d}z,$$

$$W_0(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_a^b \frac{w(x)}{x-z}\mathrm{d}x.$$

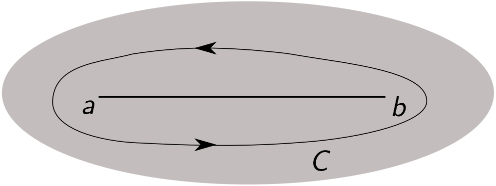


2. 佐藤超函数論の数値積分への応用

超函数を用いて，求める積分を複素積分に変換する：

$$\int_a^b \varphi(x)w(x)\mathrm{d}x = -\oint_C \varphi(z)W_0(z)\mathrm{d}z,$$

$$W_0(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_a^b \frac{w(x)}{x-z}\mathrm{d}x.$$



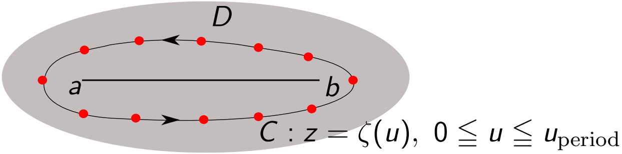
超函数法（数値積分） ⋯ 右辺の複素積分を台形則で近似.

2. 佐藤超函数論の数値積分への応用

数値積分に対する超函数法

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \varphi(x)w(x)\mathrm{d}x &= -\int_0^{u_{\mathrm{period}}} \varphi(\zeta(u))W_0(\zeta(u))\zeta'(u)\mathrm{d}u \\
&\simeq -h\sum_{k=0}^{N-1} \varphi(\zeta(kh))W_0(\zeta(kh))\zeta'(kh), \quad h = \frac{u_{\mathrm{period}}}{N},
\end{aligned}
$$

$$
C\ :\ z = \zeta(u),\ 0 \leqq u \leqq u_{\mathrm{period}} \quad \text{(周期関数)}.
$$



2. 佐藤超函数論の数値積分への応用

主な重み関数 $w(x)$ と $W_0(z)$.

区間 (a,b)	重み関数 $w(x)$	$W_0(z)$
$(-1,1)$	1	$-\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\log\dfrac{z+1}{z-1}$
$(0,1)$	$x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$ ($\alpha,\beta>0$)	$-\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}B(\alpha,\beta)z^{-1}F(\alpha,1;\alpha+\beta;z^{-1})$ * （連分数を用いて計算できる）

* $F(a,b;c;x)$ は超幾何関数：

$$F(a,b;c;x)=1+\frac{ab}{1!c}x+\frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)}x^2+\frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{3!c(c+1)(c+2)}x^3+\cdots$$

2. 佐藤超函数論の数値積分への応用

理論誤差評価

被積分関数 $\varphi(z)$ が $[a, b]$ 上実解析的で,
曲線（積分路）C が解析的ならば,

$$\text{誤差} \leqq \text{const.} \times \exp(-cN)$$ 指数関数的収束

- 本方法が最初に提案されたのは次の文献である：
  平山弘：周回積分変換法による数値積分法,
  第 44 回数値解析シンポジウム講演予稿集，2015，pp.21–24.
- 緒方は上記文献に対し佐藤超函数論との関連を指摘した.
  H. Ogata and H. Hirayama: Numerical integration method based on hyperfunction theory, J. Comput. Appl. Math., 327(2018), 243-259.
  https://doi.org/10.1016/j.cam.2017.06.018 .

2. 数値積分への応用：数値例

次の積分を超函数法，DE 公式，Gauss-Jacobi 法で計算，
誤差の標本点数 N に対する振る舞いを調べた．

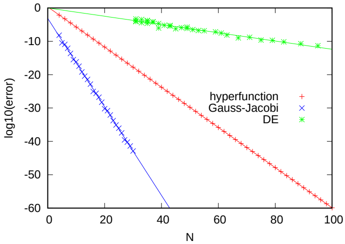
$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{1+x^2}\mathrm{d}x = B(\alpha,\beta)\,\mathrm{Re}\,F(\alpha,1;\alpha+\beta;\mathrm{i}) \quad (\,\alpha,\beta>0\,).$$

- 超函数法の複素積分路

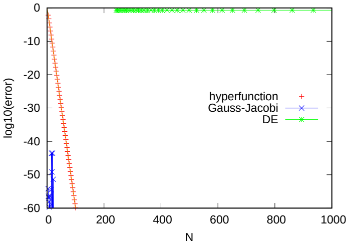
$$z=\zeta(u)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\cos u+\frac{\mathrm{i}}{4}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)\sin u,$$
$$0 \leqq u \leqq u_{\mathrm{period}}=2\pi \quad (\,\rho=2\,).$$

- 多倍長演算（10 進 100 桁，exflib），C++プログラム．

2. 数値積分への応用：数値例（数値積分誤差）



(a) $\alpha = \beta = 10^{-4}$



(b) $\alpha = \beta = 10^{-50}$

誤差の減衰率

	超函数法	DE 公式	Gauss-Jacobi 公式
(a)	$\mathrm{O}(0.25^N)$	$\mathrm{O}(0.80^N)$	$\mathrm{O}(0.047^N)$
(b)	$\mathrm{O}(0.25^N)$	—	—

2. 数値積分への応用：数値例

- 超函数法は標本点数 $N \to \infty$ で指数関数的収束する.
- 超函数法は端点特異性を強くしても収束速度はほぼ不変（DE 公式は働かなくなる. Gauss-Jacobi 公式は不安定）.

超函数法は端点特異性に強い数値積分則である.

3. 佐藤超函数論の数値 Fourier 変換への応用

Fourier 変換

$$\mathscr{F}[f](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-2\pi\mathrm{i}\xi x)\mathrm{d}x.$$

- 従来の数値積分公式による数値計算は（$f(x)$ が $x \to \pm\infty$ で遅く減衰するとき）計算が困難である.
- 超函数論を応用した数値計算法によって,
  Fourier 変換が高精度で計算できることを示す.
- H. Ogata: Numerical calculation of Fourier transforms based on hyperfunction theory, J. Comput. Appl. Math., 378(2020) 112921.
  https://doi.org/10.1016/j.cam.2020.112921 .

3. 佐藤超函数論の数値 Fourier 変換への応用

Fourier 変換を佐藤超函数論ではどのように扱うか？

$$\mathscr{F}[f](\xi) = \int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(\xi+\mathrm{i}0)x}\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(\xi-\mathrm{i}0)x}\mathrm{d}x.$$

もとの Fourier 変換積分が収束しなくても，
指数関数的減衰する因子 $\mathrm{e}^{-2\pi\epsilon|x|}$ のおかげで収束する．

（例）

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[1](\xi) &= \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(\xi+\mathrm{i}0)x}\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(\xi-\mathrm{i}0)x}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left(\frac{1}{\xi+\mathrm{i}0} - \frac{1}{\xi-\mathrm{i}0}\right) = \delta(\xi).\end{aligned}$$

3. 佐藤超函数論の数値 Fourier 変換への応用

佐藤超函数論における Fourier 変換 $\mathscr{F}[f](\xi)$ の定義

下記の定義関数 $F_{\pm}(\zeta)$ をもつ超函数として定義する.

$$\mathscr{F}[f](\xi) \equiv F_{+}(\xi + \mathrm{i}0) - F_{-}(\xi - \mathrm{i}0)$$

$$\text{with} \quad F_{+}(\zeta) = \int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\zeta x}\mathrm{d}x \quad (\,\mathrm{Im}\,\zeta > 0\,),$$

$$F_{-}(\zeta) = -\int_{0}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\zeta x}\mathrm{d}x \quad (\,\mathrm{Im}\,\zeta < 0\,).$$

3. 佐藤超函数論の数値 Fourier 変換への応用

数値 Fourier 変換：Strategy

佐藤超函数論での Fourier 変換の定義を
そのまま数値計算に用いる．

1. 上／下半平面 $\{\,\zeta \in \mathbb{C} \mid \pm \operatorname{Im}\zeta > 0\,\}$ で $F_{\pm}(\zeta)$ を計算する．
2. 解析接続により $\mathscr{F}[f](\xi) = F_{+}(\xi + \mathrm{i}0) - F_{-}(\xi - \mathrm{i}0)$ $(\,\xi \in \mathbb{R}\,)$ を計算する．

$$\mathscr{F}[f](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\xi x}\mathrm{d}x = F_{+}(\xi + \mathrm{i}0) - F_{-}(\xi - \mathrm{i}0),$$

$$\text{where} \quad F_{+}(\zeta) = \int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\zeta x}\mathrm{d}x \qquad (\,\operatorname{Im}\zeta > 0\,),$$

$$F_{-}(\zeta) = -\int_{0}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\zeta x}\mathrm{d}x \qquad (\,\operatorname{Im}\zeta < 0\,).$$

3. 数値 Fourier 変換への応用: strategy 1/2

1. 上／下半平面 $\{\,\zeta \in \mathbb{C} \mid \pm \operatorname{Im}\zeta > 0\,\}$ 上で $F_{\pm}(\zeta)$ を計算する.

$F_{\pm}(\zeta)$ を Taylor 級数の形で求める.

$$F_{\pm}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(\pm)} (\zeta - \zeta_0^{(\pm)})^n \quad (\,\pm \operatorname{Im}\zeta_0^{(\pm)} > 0\,),$$

$$c_n^{(\pm)} = \frac{1}{n!} F_{\pm}^{(n)}(\zeta_0^{(\pm)}) = \pm \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} \underbrace{(\pm 2\pi \mathrm{i} x)^n f(\mp x) \mathrm{e}^{\pm 2\pi \mathrm{i} \zeta_0^{(\pm)} x}}_{\text{指数関数的減衰}} \mathrm{d}x.$$

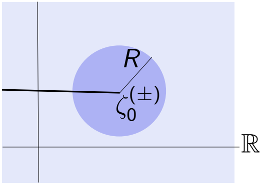
Taylor 係数 c_m は従来の数値積分公式（DE 公式）で計算できる.

3. 数値 Fourier 変換: strategy 2/2

2. 解析接続により $\mathscr{F}[f](\xi) = F_+(\xi + \mathrm{i}0) - F_-(\xi - \mathrm{i}0)$ を求める.

$F_\pm(\zeta)$ を連分数に変換する.

$$F_\pm(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\zeta - \zeta_0^{(\pm)})^n$$
$$= \cfrac{a_0^{(\pm)}}{1 + \cfrac{a_1^{(\pm)}(\zeta - \zeta_0^{(\pm)})}{1 + \cfrac{a_2^{(\pm)}(\zeta - \zeta_0^{(\pm)})}{1 + \ddots}}}$$



連分数（Taylor 級数）の収束域

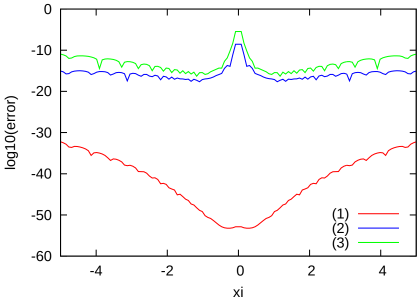
連分数は Taylor 級数より収束域が広い.

連分数への変換 $\cdots$ 商差法により計算
商差法は数値的に不安定である. → 多倍長演算

3. 数値 Fourier 変換：数値例（誤差）

次の 3 個の Fourier 変換を本方法で計算した（いずれも $\xi \neq 0$）：

(1) $\mathscr{F}[\tanh(\pi x)](\xi)$, (2) $\mathscr{F}[(1+x^2)^{-\nu-1/2}](\xi)$, (3) $\mathscr{F}[\log|x|](\xi)$.



- 縦軸: $\log_{10}$(誤差)
- 横軸: ξ
- プログラム言語：C++
- 多倍長演算
  - 10 進 100 桁
  - exflib

数値積分（DE 公式）に用いた標本点数：
(1) 1330 (2) 1416 (3) 1430.

3. 数値 Fourier 変換：興味深い事実

Fourier 変換を計算するのに，振動積分を計算する必要がない.

定義関数 ($\mathscr{F}[f](\xi) = F_+(\xi + \mathrm{i}0) - F_-(\xi - \mathrm{i}0)$)

$$
\begin{aligned}
F_\pm(\zeta) &= \pm \int_0^\infty f(\mp x) \mathrm{e}^{\pm 2\pi\mathrm{i}\zeta x} \mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^\infty c_n^{(\pm)} (\zeta \mp \mathrm{i})^n \quad (\pm \operatorname{Im} \zeta > 0),
\end{aligned}
$$

$$
c_n^{(\pm)} = \pm \frac{1}{n!} \int_0^\infty (\pm 2\pi\mathrm{i}x)^n f(\mp x) \exp(-2\pi x) \mathrm{d}x.
$$

振動関数を含まない.

3. 数値 Fourier 変換: 数値例，既存方法との比較

次の Fourier 変換を本方法，既存 2 方法で計算した．

$$\mathscr{F}[\tanh(\pi x)](\xi) = -\mathrm{i}\,\mathrm{cosech}(\pi\xi), \quad \xi = 1.$$

- 既存 2 方法
  - DE 公式& Richardson 補外 (M. Sugihara, 1987)
  - 大浦・森の DE 公式 (1991)
- 多倍長演算 (10 進 100 桁, *exflib*)
- Taylor 級数の中心 $\zeta_0^{(\pm)} = \pm\mathrm{i}$.

	標本点数	誤差
本方法	1330	7.5×10^{-43}
DE & Richardson	17156	7.8×10^{-21}
大浦・森 DE 公式	1892	1.5×10^{-46}

3. 数値 Fourier 変換: 数値例，既存方法との比較

- 本方法 > 大浦・森 DE 公式 > DE & Richardson
- 本方法は $\mathscr{F}[f](\xi)$ を関数として求める, i.e.,
  一旦連分数の係数 $a_n^{(\pm)}$ が求められたら，その他の
  ξ の値に対する $\mathscr{F}[f](\xi)$ の計算に使いまわしできる.
- 既存の方法は $\mathscr{F}[f](\xi)$ を積分値（数）として計算する.
  ξ が変わったら改めて数値積分しなければならない.

4. まとめ：考察

解析関数…離れた 2 点の値が結びついている．

$\Downarrow$

超函数

$$f(x) = F_+(x + \mathrm{i}0) - F_-(x - \mathrm{i}0) \quad (\, x \in \mathbb{R}\,)$$ 計算が難しい

$\Uparrow$

$$F(z) \quad (\, z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\,)$$ 計算しやすい

4. まとめ

- 佐藤超函数論
  - 複素関数論に基づく一般化関数論.
  - 超函数＝複素解析関数の実軸における境界値の差.
- 数値積分
  - 求める積分を超関数積分の定義に従って複素積分で表し，それを台形則で近似する.
  - とくに端点特異性の強い積分に対して有効である.
- 数値 Fourier 変換
  - Fourier 変換自体が超函数である.
  - 定義関数を複素平面で計算→実軸上へ解析接続.