連分数と数値解析

電気通信大学オープンキャンパス

緒方　秀教

電気通信大学　大学院情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻

2020 年 7 月 19 日（日）

1. 連分数

連分数 (continued fraction)

$$C = \cfrac{a_0}{b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots}}}$$

略記法（のひとつ）

$$C = \frac{a_0|}{|b_0} + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots .$$

有限連分数 $\quad C = \frac{a_0|}{|b_0} + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n},$

無限連分数 $\quad C = \frac{a_0|}{|b_0} + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots .$

2. 有理数の連分数表示

（例）163/31 を連分数で表す．→ **Euclid の互除法**

$$\begin{aligned} 163 &= 5 \times 31 + 8, \\ 31 &= 3 \times 8 + 7, \\ 8 &= 1 \times 7 + 1, \\ 7 &= 7 \times 1 \quad \text{終わり.} \end{aligned}$$

（これより，163 と 31 の最大公約数は 1.）
上の計算から，

$$\begin{aligned} \frac{163}{31} &= 5 + \frac{8}{31} = 5 + \frac{1}{31/8} = 5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{7}{8}} \\ &= 5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{8/7}} = 5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7}}} \end{aligned}$$

無限連分数

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{a_0|}{|b_0} + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots \\
&= \cfrac{a_0}{b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots}}}.
\end{aligned}
$$

無限連分数 C の第 n 近似分数

$$
w_n = \frac{a_0|}{|b_0} + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n}.
$$

無限連分数 C の値：近似分数列の極限で定義する．

$$
C \equiv \lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_0|}{|b_0} + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n}.
$$

3. 無理数の連分数表示

（例）$\sqrt{2}$ の連分数表示を求める．

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1) \quad （\sqrt{2} \text{ の整数部分＋小数部分}）$$

$$= 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)}$$

（$1 + \sqrt{2}$ の整数部分＋小数部分）

$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+\sqrt{2}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)}}} = \dots,$$

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}.$$

3. 無理数の連分数表示

いろんな無理数が美しい連分数の形で表される．

$$\text{黄金比}\quad \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}},$$

$$\text{円周率}\quad \pi = \cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{3+\cfrac{2^2}{5+\cfrac{3^2}{7+\cfrac{4^2}{9+\ddots}}}}}.$$

3. 無理数の連分数表示

ネピア (Napier) の数

$$\mathrm{e} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{7 + \ddots}}}}}}}}.$$

3. 無理数の連分数表示

ロジャース・ラマヌジャン恒等式 (Rogers-Ramanujan identity) の系から，次の等式が得られる．

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{e^{-2\pi}}{1+\cfrac{e^{-4\pi}}{1+\cfrac{e^{-6\pi}}{1+\ddots}}}} = \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) e^{2\pi/5}.$$

連分数を次のように計算するのは面倒である.

$$
\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{13}{4}}}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{4}{13}}}
$$

$$
=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{30}{13}}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{13}{30}}=\cfrac{1}{\cfrac{43}{30}}=\frac{43}{30}.
$$

数列の漸化式を用いた効率的な計算法がある.

連分数の近似分数の生成法

数列 $\{p_n\}, \{q_n\}$ を漸化式

$$\left.\begin{aligned} p_n &= a_n p_{n-2} + b_n p_{n-1} \\ q_n &= a_n q_{n-2} + b_n q_{n-1} \end{aligned}\right\} \quad (\, n = 1, 2, \ldots\,),$$

$$p_{-1} = 0,\ q_{-1} = 1,\ p_0 = a_0,\ q_0 = b_0.$$

で求めると，

$$\text{第 } n \text{ 近似分数} \quad w_n = \frac{p_n}{q_n} = \frac{a_0|}{|b_0} + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n}.$$

（証明）

$$\begin{aligned}
C &= \frac{a_0|}{|b_0} + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots \\
&= \frac{p_0}{q_0 + C_1} \qquad \left(C_1 = \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots \right) \\
&= \frac{p_0}{q_0 + \dfrac{a_1}{b_1 + C_2}} \qquad \left(C_2 = \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots \right) \\
&= \frac{p_0(b_1 + C_2)}{q_0(b_1 + C_2) + a_1} = \frac{\overbrace{b_1 p_0}^{p_1} + p_0 C_2}{\underbrace{a_1 q_{-1} + b_1 q_0}_{q_1} + q_0 C_2} = \frac{p_1 + p_0 C_2}{q_1 + q_0 C_2}.
\end{aligned}$$

ここで $C_2 = 0$ とおいたものは第 1 近似分数 w_1 に一致するので，
$w_1 = p_1/q_1$ を得る．

（証明（続））

$$C = \frac{p_1 + \dfrac{p_0 a_2}{b_2 + C_3}}{q_1 + \dfrac{q_0 a_2}{b_2 + C_3}} \quad \left(C_3 = \frac{a_3|}{|b_3} + \frac{a_4|}{|b_4} + \cdots \right)$$

$$= \frac{p_1(b_2 + C_3) + a_2 p_0}{q_1(b_2 + C_3) + a_2 q_0} = \frac{\overbrace{a_2 p_0 + b_2 p_1}^{p_2} + p_1 C_3}{\underbrace{a_2 q_0 + b_2 q_2}_{q_2} + q_1 C_3} = \frac{p_2 + p_1 C_3}{q_2 + q_1 C_3}.$$

ここで $C_3 = 0$ とおいたものは第 2 近似分数 w_2 に一致するので，$w_2 = p_2/q_2$ を得る．以下同文． ■

今まで「数」の連分数を考えてきたが,「関数」の連分数も考えられる.

関数項連分数

$$C(x) = \cfrac{a_0}{b_0 + \cfrac{a_1 x}{b_1 + \cfrac{a_2 x}{b_2 + \ddots}}}.$$

関数項連分数は他の形のものも考えられるが,
ここでは上の形のもののみ考える.

5. 関数項連分数

いろんな関数が連分数表示される, i.e.,

arctan x

$\arctan x$: tan の逆関数．$y = \arctan x \;\Leftrightarrow\; x = \tan y$.

$$\arctan x = \cfrac{x}{1 + \cfrac{1^2x^2}{3 + \cfrac{2^2x^2}{5 + \cfrac{3^2x^2}{7 + \cfrac{4^2x^2}{9 + \ddots}}}}}.$$

π の連分数表示は，上式に $x = 1$ を代入して得られる．
$\tan(\pi/4) = 1$ より $\arctan(1) = \pi/4$ に注意．

5. 関数項連分数

$$\log(1+x) = \cfrac{x}{1+\cfrac{1^2x}{2+\cfrac{1^2x}{3+\cfrac{2^2x}{4+\cfrac{2^2x}{5+\ddots}}}}},$$

$$e^x = \cfrac{1}{1-\cfrac{x}{1+\cfrac{x}{2-\cfrac{x}{3+\cfrac{x}{2-\cfrac{x}{5+\ddots}}}}}}.$$

6. 解析関数の解析接続

連分数の応用として,「解析関数」と呼ばれる関数の「解析接続」を数値計算で行う方法を考える．まず,

解析関数 (analytic function) とは？

- 収束する冪（べき）級数として表される複素関数.
- 複素関数として微分可能である（正則関数）と同値.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (\,|z - z_0| < R\,),$$

$$R = \left(\limsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n}\right)^{-1} \quad 収束半径，\ |z - z_0| < R \text{ で収束.}$$

$*$ 以降，$z_0 = 0$ とする.

6. 解析関数の解析接続

理工系でよく現れる関数の多くは解析関数である．

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots \quad (\,|z| < \infty\,),$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots \quad (\,|z| < \infty\,),$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots \quad (\,|z| < \infty\,),$$

$$\log(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{n+1} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots \quad (\,|z| < 1\,).$$

関数 $f(z)$ の Taylor 級数展開

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{2!} z^2 + \cdots .$$

解析接続 (analytic continuation)

解析関数 $f(z)$ を $|z| < R$（R : 収束半径）の外に拡張する.

（例）

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots \quad (\,|z| < 1\,).$$

等比級数の公式より,

$$f(z) = \frac{1}{1-z}.$$

$\therefore$ $f(z)$ の定義域が, $|z| < 1$ から $z \neq 1$ に広がった.

6. 解析関数の解析接続：ゼータ関数

解析接続の応用.

ゼータ関数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots\quad(\operatorname{Re}s>1).$$

$$\zeta(s)=\prod_{p:\text{素数}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}=\left(1-\frac{1}{2^s}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{3^s}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{5^s}\right)^{-1}\cdots$$

- 数論の研究.
- リーマン予想：$\zeta(s)$ の自明でない零点は $\operatorname{Re}s=1/2$ 上にある.

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$
$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}.$$

有理数の無限の足し算に π が現れるところに
ロマンを感じてほしい.

数学的に収束する無限級数でも数値的に計算可能とは限らない.

（例）$\zeta(2) = \pi^2/6 = 1.64493\,40668\,48226\ldots$

N	第 N 項までの部分和	誤差
100	1.63498 39001 84893	6×10^{-3}
1000	1.64393 45666 81560	6×10^{-4}
10000	1.64483 40718 48060	6×10^{-5} 収束が遅い

$\zeta(s)$ の数値計算法が必要…解析接続の出番.

6. 解析関数の解析接続

連分数による解析接続

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad (\,|z| < R\,).$$

$$\Downarrow$$

連分数に変換 $\quad f(z) = \cfrac{a_0}{1 + \cfrac{a_1 z}{1 + \cfrac{a_2 z}{1 + \ddots}}}.$

- 一般に連分数は収束が速い．
- 連分数に変換することにより，$|z| < R$ の外で $f(z)$ が計算できることがある．
- $|z| < R$ においても収束が速くなることがある．

6. 解析関数の解析接続

連分数への変換をどうやって行うか？

1. 商差法：数列 $\{e_k^{(n)}\}, \{q_k^{(n)}\}$ を次の漸化式で生成.

$f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ に対し，

$$e_0^{(n)} = 0, \quad q_1^{(n)} = \frac{c_{n+1}}{c_n} \quad (\, n = 0, 1, 2, \ldots\,),$$

$k = 1, 2, \ldots$ に対し

$$\left.\begin{aligned} e_k^{(n)} &= q_k^{(n+1)} - q_k^{(n)} + e_{k-1}^{(n+1)} \\ q_{k+1}^{(n)} &= \frac{e_k^{(n+1)}}{e_k^{(n)}} q_k^{(n+1)} \end{aligned}\right\} \quad (\, n = 0, 1, 2, \ldots\,).$$

（注意）商差法の計算は数値的に不安定なので，
exflib などの多倍長計算ライブラリを使う必要がある.

2. $\{q_k^{(n)}\}$, $\{e_k^{(n)}\}$ を用いれば，もとの解析関数は次のように連分数に変換される．

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

$$\Downarrow$$

$$f(z) = \cfrac{c_0}{1 - \cfrac{q_1^{(0)} z}{1 - \cfrac{e_1^{(0)} z}{1 - \cfrac{q_2^{(0)} z}{1 - \cfrac{e_2^{(0)} z}{1 - \ddots}}}}}.$$

ゼータ関数 $\zeta(s)$ を，解析接続を用いて計算する．

解析関数

$$f_s(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} z^n = 1 - \frac{z}{2^s} + \frac{z^2}{3^s} - \frac{z^3}{4^s} + \cdots \quad (\ |z| < 1\ ).$$

$$\Downarrow$$

$$\zeta(s) = \frac{f_s(1)}{1 - 2^{1-s}}.$$

$f_s(1)$ を求めるには，
$f_s(z)$ を $|z| < 1$ の外へ解析接続しなければならない．

6. 解析関数の解析接続：ゼータ関数の計算

$*\ \zeta(s) = f_s(1)/(1-2^{1-s})$ の理由.

$$
\begin{aligned}
f_s(1) &= 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \cdots \\
&= \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots\right) - 2\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \cdots\right) \\
&= \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots\right) - 2\left\{\frac{1}{(2\cdot 1)^s} + \frac{1}{(2\cdot 2)^s} + \frac{1}{(2\cdot 3)^s} + \cdots\right\} \\
&= \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots\right) - 2\cdot\frac{1}{2^s}\left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots\right) \\
&= \zeta(s) - 2^{1-s}\zeta(s),
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \quad \zeta(s) = \frac{f_s(1)}{1-2^{1-s}}.
$$

$f_s(z)$ の解析接続により $\zeta(s)$ を計算した．
（N：計算に用いた $f_s(z)$ の連分数展開の項数）

N	計算値	誤差
$\zeta(2) = \pi^2/6 = 1.64493\,40668\,48226\,43647\,24151\,66646\ldots$		
5	1.64489 69002 93712 58209 31254 90598	2×10^{-5}
10	1.64493 40726 89542 83663 16613 13592	4×10^{-9}
20	1.64493 40668 48226 56075 12003 15320	8×10^{-17}
30	1.64493 40668 48226 43647 24178 71472	2×10^{-24}
40	1.64493 40668 48226 43647 24151 66646	4×10^{-32}

6. 解析関数の解析接続：ゼータ関数の計算

N	計算値	誤差
	$\zeta(3) = 1.20205\,69031\,59594\,28539\,97381\,61511\ldots$	
5	1.20204 63030 72491 70127 17003 53138	9×10^{-6}
10	1.20205 69046 12434 17903 19279 09247	1×10^{-9}
20	1.20205 69031 59594 31459 67766 32634	2×10^{-17}
30	1.20205 69031 59594 28539 97387 82485	5×10^{-25}
40	1.20205 69031 59594 28539 97381 61511	1×10^{-32}
	$\zeta(4) = \pi^4/90 = 1.08232\,32337\,11138\,19151\,60036\,96541\ldots$	
5	1.08232 02775 69940 89008 44436 34696	3×10^{-6}
10	1.08232 32340 53672 81736 77739 03745	3×10^{-10}
20	1.08232 32337 11138 19775 52807 95555	6×10^{-18}
30	1.08232 32337 11138 19151 60038 23995	1×10^{-25}
40	1.08232 32337 11138 19151 60036 96541	2×10^{-33}

$\zeta(2), \zeta(3), \zeta(4)$ が高精度で計算できた:-)

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta(-1) = -\frac{1}{12}, \quad \zeta(-3) = \frac{1}{120}, \quad \zeta(\text{負の偶数}) = 0,$$

つまり,

$$\begin{aligned} 1 + 1 + 1 + \cdots &= -\frac{1}{2} \ !? \\ 1 + 2 + 3 + \cdots &= -\frac{1}{12} \ !? \\ 1 + 2^3 + 3^3 + \cdots &= \frac{1}{120} \ !? \\ 1^{2m} + 2^{2m} + 3^{2m} + \cdots &= 0 \quad (\ m = 1, 2, \ldots\ ) \ !? \end{aligned}$$

なんだこれは !? と思うかもしれないが…

$\zeta(0), \zeta(-1), \zeta(-2), \zeta(-3)$ も我々の方法で計算してみる.

N	計算値	誤差
	$\zeta(0) = -1/2$	
1	$-5.00000\,00000\,00000\,00000 \times 10^{-1}$	$3 \times 10^{-116} \approx 0$
	$\zeta(-1) = -1/12 = -8.333\ldots \times 10^{-2}$	
1	$-1.11111\,11111\,11111\,11111 \times 10^{-1}$	1×3^{-1}
2	$-6.66666\,66666\,66666\,66666 \times 10^{-2}$	2×10^{-1}
3	$-8.33333\,33333\,33333\,33333 \times 10^{-2}$	$1 \times 10^{-115} \approx 0$
	$\zeta(-2) = 0$	
1	$-2.85714\,28571\,42857\,14285 \times 10^{-2}$	3×10^{-2}
2	$3.29670\,32967\,03296\,70329 \times 10^{-2}$	3×10^{-2}
3	$3.24675\,32467\,53246\,75324 \times 10^{-3}$	3×10^{-3}
4	$-1.55279\,50310\,55900\,62111 \times 10^{-3}$	2×10^{-3}
5	$-1.20099\,03337\,29726\,86458 \times 10^{-116}$	$1 \times 10^{-116} \approx 0$

N	計算値	誤差
	$\zeta(-3) = 1/120 = 8.333\ldots \times 10^{-3}$	
1	$-7.40740\,74074\,07407\,40740 \times 10^{-3}$	2×10^{0}
2	$5.52380\,95238\,09523\,80952 \times 10^{-2}$	6×10^{0}
3	$1.75697\,86535\,30377\,66830 \times 10^{-2}$	1×10^{0}
4	$1.40056\,02240\,89635\,85434 \times 10^{-3}$	8×10^{-1}
5	$7.76942\,35588\,97243\,10776 \times 10^{-3}$	7×10^{-2}
6	$8.57142\,85714\,28571\,42857 \times 10^{-3}$	3×10^{-2}
7	$8.33333\,33333\,33333\,33333 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^{-113} \approx 0$

有限項の連分数計算で，$\zeta(0), \zeta(-1), \zeta(-2), \zeta(-3)$ の厳密値が計算できた．

6. 解析関数の解析接続：ゼータ関数の計算

ζ(非正整数) が厳密に計算できた理由.

$s =$ 非正整数 の場合，$f_s(z)$ は有理関数（多項式の分数）である.

$$
\begin{aligned}
f_0(z) &= 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots = \frac{1}{1+z} \quad (\,|z| < 1\,), \\
f_{-1}(z) &= 1 - 2z + 3z^2 - 4z^3 + \cdots \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z - z^2 + z^3 - z^4 + \cdots) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z}{1+z}\right) = \frac{1}{(1+z)^2} \quad (\,|z| < 1\,),
\end{aligned}
$$

$$
f_{-2}(z) = \frac{1-z}{(1+z)^3}, \quad f_{-3}(z) = \frac{1-4z+z^2}{(1+z)^4} \quad (\,|z| < 1\,).
$$

有理関数の連分数展開は有限項で切れる．

$$
\begin{aligned}
f_{-1}(z) &= \frac{1}{(1+z)^2} = \frac{1}{1+2z(1+z/2)} \\
&= \cfrac{1}{1+\cfrac{2z}{\cfrac{1}{1+z/2}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{2z}{1-\cfrac{z/2}{1+z/2}}}, \\
f_{-2}(z) &= \frac{1-z}{(1+z)^3} = \cfrac{1}{1+\cfrac{4z}{1-\cfrac{(7/4)z}{1+\cfrac{(17/28)z}{1-\cfrac{(32/119)z}{1+(7/17)z}}}}}.
\end{aligned}
$$

ただ，こういう裏事情がわかってしまうと，正直言って自分のやってることがつまらなく (trivial) 感じてしまう…

最後に

数値解析を学ぶ心構え

- 数学の基礎的知識・計算力.
- 自然科学・社会科学に対する広い関心.
- 好奇心　計算してみよう！