楕円関数論 (1)
Jacobi の楕円関数（導入）

緒方　秀教

電気通信大学　大学院情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻

2020 年 11 月 24 日（火）

はじめに

竹内端三「楕圓函數論」（岩波書店，1936 年）緒言より

いつまでも楕圓函數を敬遠して居るべきではあるまい，理論的にも實用上にも之を恰かも三角函數の如くに自在に利用して然るべきである．

- 三角関数のような感じで気軽に楕円関数を学ぶことを目指します．
- 楕円関数は二重周期性をもつ複素関数．
（途中から）複素関数論の知識が必要になります．
- 楕円関数等の数値計算も適宜紹介します．

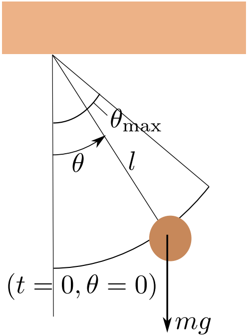
これからの内容

1. Jacobi の楕円関数
    - 単振り子の運動，定義.
    - 加法定理.
    - 複素関数への拡張，二重周期性.
2. 楕円関数の一般論.
3. テータ函数.
4. Weierstrass の楕円関数.
5. …

単振り子の運動方程式

単振り子

質量 m, 糸の長さ l, 振れの角度 θ
（$\theta_{\max}$：θ の最大値，$t=0$ で $\theta=0$）



運動方程式

$$ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -mg\sin\theta,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\sin\theta = 0 \qquad \left(\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}\right).$$

両辺に $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ を掛けて積分する：

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \omega_0^2\cos\theta = -\omega_0^2\cos\theta_{\max} \quad \text{エネルギー保存則},$$

$$\frac{1}{4\omega_0^2}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \sin^2\frac{\theta_{\max}}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}.$$

単振り子の運動方程式

$$\frac{1}{4\omega_0^2}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = k^2 - \sin^2\frac{\theta}{2}, \quad k = \sin\frac{\theta_{\max}}{2} \quad (\, 0 < k < 1\,).$$

$\sin\dfrac{\theta}{2} = k\sin\varphi$ とおくと，

$$\frac{1}{\omega_0^2}\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2 = 1 - k^2\sin^2\varphi,$$

$$\int_0^{\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \omega_0 t$$

$*$ ここでは $t=0$ 直後を考える．そのとき，$\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t > 0$.

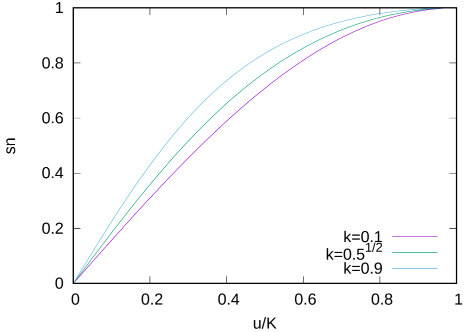
$$\int_0^{x}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \omega_0 t \quad (\, x = \sin\varphi\,).$$

sn 関数

Jacobi の楕円関数 sn u

$$x = \mathrm{sn}\, u = \mathrm{sn}(u; k) \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad u = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

k ($0 < k < 1$) 母数 (modulus).



sn$(u; k)$ のグラフ

$k = 0.1, \sqrt{0.5}, 0.9.$

縦軸：sn$(u; k)$, 横軸：u/K.

$$K = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

第 1 種完全楕円積分（後述）.

sn u は $0 \leq u \leq K$ で単調増加，sn $0 = 0$, sn $K = 1$.

sn 関数，単振り子の運動方程式の解

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \omega_0 t \quad \text{より} \quad x = \operatorname{sn} \omega_0 t.$$

$x = \sin\varphi$, $\sin(\theta/2) = k\sin\varphi$ であったから，

単振り子の運動方程式の解

$$\theta(t) = 2\arcsin\left[k\operatorname{sn}(\omega_0 t; k)\right] \quad \left(k = \sin\frac{\theta_{\max}}{2},\ \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \right).$$

とくに振れの角が小さい場合，

$$\theta_{\max} \approx 0, \quad k = \sin\frac{\theta_{\max}}{2} \approx \frac{\theta_{\max}}{2} \approx 0, \quad \operatorname{sn}(\omega_0 t; k) \approx \sin\omega_0 t,$$

$$\therefore \quad \theta(t) \approx \theta_{\max}\sin\omega_0 t \quad \text{単振動.}$$

$\mathrm{sn}(u;k)$, 極限 $k \to 0, 1$

$\mathrm{sn}(u;k)$ ($0 < k < 1$) の定義.

$$x = \mathrm{sn}(u;k) \quad \Leftrightarrow \quad u = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

- 極限 $k \to 0$.

$$u = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x, \quad x = \sin u,$$

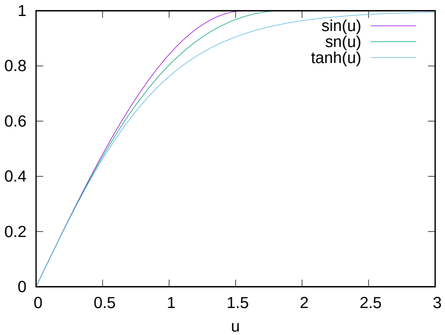
$$\therefore \quad \mathrm{sn}(u;0) = \sin u.$$

- 極限 $k \to 1$.

$$u = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad x = \tanh u,$$

$$\therefore \quad \mathrm{sn}(u;1) = \tanh u.$$

極限 $k \to 0, 1$



$\mathrm{sn}(u; 0) = \sin u$, $\mathrm{sn}(u; \sqrt{0.5})$, $\mathrm{sn}(u; 1) = \tanh u$ のグラフ.

「楕円」関数，名前の由来

$\mathrm{sn}(u; k)$ を何故「『楕円』関数」と呼ぶのか？

$\mathrm{sn}(u; k)$ は「楕円積分」の逆関数.

楕円積分

k, n：定数 ($0 < k < 1$)

$$\text{第 1 種楕円積分}: \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$\text{第 2 種楕円積分}: \int \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\mathrm{d}x,$$

$$\text{第 3 種楕円積分}: \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

楕円の周長は第 2 種楕円積分を用いて表されることがわかっている.

振り子の周期，第１種完全楕円積分

振り子の周期 T を求める．

$$\theta_{\max} = \theta\left(\frac{T}{4}\right) = 2\arcsin\left[k\,\mathrm{sn}\left(\frac{\omega_0 T}{4}; k\right)\right], \quad k = \sin\frac{\theta_{\max}}{2},$$

$$\therefore \quad \mathrm{sn}\left(\frac{\omega_0 T}{4}; k\right) = 1,$$

第 1 種完全楕円積分

$$K = K(k) \equiv \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$\mathrm{sn}\,K = \mathrm{sn}(K; k) = 1.$$

振り子の周期 $\quad T = \dfrac{4K}{\omega_0} \quad \left(k = \sin\dfrac{\theta_{\max}}{2},\ \omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}\right).$

振り子の周期，第１種完全楕円積分

- 極限 $k \to 0$.

$$\lim_{k\to 0} K(k) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

- 極限 $k \to 1$.

$$\lim_{k\to 0} K(k) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \infty.$$

振り子の周期

$$T = \frac{4K(k)}{\omega_0} = 4K(k)\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

振れの角が小さい時，$k = \sin(\theta_{\mathrm{max}}/2) \approx 0$ であるので，

$$T \approx 4 \cdot \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

高校物理で習う単振り子の周期.

cn, dn 関数

cn, dn 関数

$|u| \leq K$ のとき,

$$\mathrm{cn}\, u = \mathrm{cn}(u; k) \equiv \sqrt{1 - \mathrm{sn}^2 u},$$
$$\mathrm{dn}\, u = \mathrm{dn}(u; k) \equiv \sqrt{1 - k^2 \mathrm{sn}^2 u}.$$

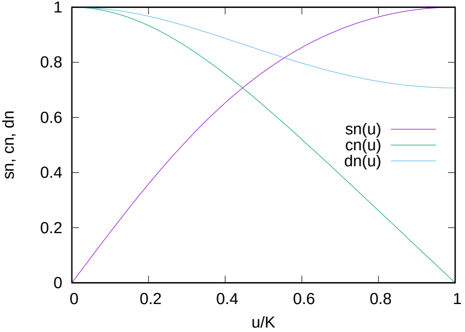
$$\mathrm{cn}\, 0 = \mathrm{dn}\, 0 = 1,$$
$$\mathrm{cn}\, K = 0, \quad \mathrm{dn}\, K = k' \quad (\, k' = \sqrt{1-k^2} \quad \text{補母数}\,).$$

$\mathrm{sn}(u; 0) = \sin u, \quad \mathrm{sn}(u; 1) = \tanh u$ より,

$$\mathrm{cn}(u; 0) = \cos u, \quad \mathrm{cn}(u; 1) = \mathrm{sech}\, u.$$

$\mathrm{sn}\, u$: $\sin u$ のようなもの. $\mathrm{cn}\, u$: $\cos u$ のようなもの.

cn, dn 関数



sn$(u;k)$, cn$(u;k)$, dn$(u;k)$ ($k=\sqrt{0.5}$) のグラフ.

縦軸：sn, cn, dn， 横軸：u/K.

第 1 種完全楕円積分の数値計算

第 1 種完全楕円積分 K の数値計算.

$$K = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}.$$

周期解析関数の 1 周期区間積分は，台形則で精度良く計算できる.

$$K \approx K_n = h\left\{\frac{1}{2}f(0) + \sum_{k=1}^{n-1} f(kh) + \frac{1}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$
$$\left(f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}, \quad h = \frac{\pi}{2n}\right).$$

第 1 種完全楕円積分の数値計算

$k = \sqrt{0.5}$ に対し第 1 種完全楕円積分 K を台形則で数値計算した.

n	K_n
2^2	1.85407 52277 67308
2^3	1.85407 46773 01667
2^4	1.85407 46773 01372
厳密値	1.85407 46773 01372 . . .

$*$ 第 1 種完全楕円積分は算術幾何平均を用いても計算できる.

次回は…

- sn, cn, dn の加法定理.
- 定義域を $-\infty < u < \infty$ に拡張.