楕円関数論 (2)
Jacobi の楕円関数（定義域の拡張，加法定理）

緒方　秀教

電気通信大学　大学院情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻

2020 年 11 月 25 日（水）

復習

Jacobi の楕円関数 ($0 \le u \le K$)

$$x = \mathrm{sn}\, u = \mathrm{sn}(u;k) \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad u = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$\mathrm{cn}\, u = \mathrm{cn}(u;k) = \sqrt{1-\mathrm{sn}^2\, u},$$

$$\mathrm{dn}\, u = \mathrm{dn}(u;k) = \sqrt{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\, u},$$

$$k\ (\,0<k<1\,)\ :\ 母数, \quad k' = \sqrt{1-k^2}\ :\ 補母数,$$

$$第\,1\,種完全楕円積分 \quad K = K(k) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

今回の内容

- sn, cn, dn の加法定理.

$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v,$$
$$\mathrm{sn}(u+v) = ?$$

- sn, cn, dn の定義域：$0 \leq u \leq K$ から $-\infty < u < \infty$ へ.
  sn, cn, dn は周期関数となる.

ますます楕円関数は三角関数っぽくなります.

定義域の拡張 $(-K \le u \le K)$

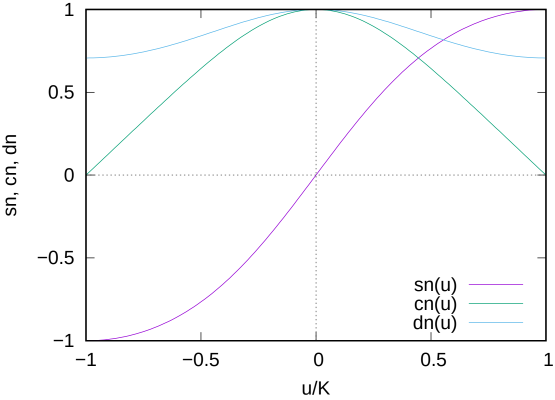
まず，sn, cn, dn の定義域を $(-K \le u \le K)$ に拡張する．
$0 \le u \le K$，$x = \mathrm{sn}(u;k)$ とすると，

$$u = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad -u = \int_0^{-x} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$\therefore \quad -x = \mathrm{sn}(-u;k) = -\mathrm{sn}(u;k).$$

- $\mathrm{sn}\, u$ は $-K \le u \le K$ へ奇関数として拡張される．
- $\mathrm{cn}\, u = \sqrt{1-\mathrm{sn}^2 u}$, $\mathrm{dn}\, u = \sqrt{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 u}$,
  $-K \le u \le K$ へ偶関数として拡張される．

定義域の拡張 $(-K \le u \le K)$



$-K \le u \le K$ に拡張した sn u, cn u, dn u ($k = \sqrt{0.5}$) のグラフ.

加法定理

$\mathrm{sn}\, u, \mathrm{cn}\, u, \mathrm{dn}\, u$ を $-K \leq u \leq K$ から $-\infty < u < \infty$ に拡張する．
それには，これから導出する加法定理を用いる．

加法定理

$\mathrm{sn}\, u, \mathrm{cn}\, u, \mathrm{dn}\, u$ を $-K \leq u \leq K$ から $-\infty < u < \infty$ に拡張する．
それには，これから導出する加法定理を用いる．

sn の加法定理

$$\mathrm{sn}(u+v) = \frac{\mathrm{sn}\, u\, \mathrm{cn}\, v\, \mathrm{dn}\, v + \mathrm{sn}\, v\, \mathrm{cn}\, u\, \mathrm{dn}\, u}{1 - k^2\, \mathrm{sn}^2\, u\, \mathrm{sn}^2\, v}.$$

加法定理

$\mathrm{sn}\, u, \mathrm{cn}\, u, \mathrm{dn}\, u$ を $-K \le u \le K$ から $-\infty < u < \infty$ に拡張する．
それには，これから導出する加法定理を用いる．

sn の加法定理

$$\mathrm{sn}(u+v) = \frac{\mathrm{sn}\, u\, \mathrm{cn}\, v\, \mathrm{dn}\, v + \mathrm{sn}\, v\, \mathrm{cn}\, u\, \mathrm{dn}\, u}{1 - k^2\, \mathrm{sn}^2\, u\, \mathrm{sn}^2\, v}.$$

$*$ $\mathrm{sn}(u;0) = \sin u$, $\mathrm{sn}(u;1) = \tanh u$ の加法定理.

$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \sin v \cos u,\ \tanh(u+v) = \frac{\tanh u\, \mathrm{sech}^2\, v + \tanh v\, \mathrm{sech}^2\, u}{1 - \tanh^2 u \tanh^2 v}.$$

$$\mathrm{cn}(u;0) = \cos u, \quad \mathrm{dn}(u;0) = 1, \quad \mathrm{cn}(u;1) = \mathrm{dn}(u;1) = \mathrm{sech}\, u$$

に注意すれば，$\mathrm{sn}(u;k)$ の加法定理は，
$\sin u = \mathrm{sn}(u; k=0)$，$\tanh u = \mathrm{sn}(u; k=1)$ の加法定理を k について補間したものとみなせる．

sn の加法定理の証明 (Darboux)

（証明） c を任意定数として変数 u, v が $u + v = c$ を満たす時，
（sn の加法定理の左辺）$=$ sn c を満たすことを示せばよい．
$x = \mathrm{sn}\, u$, $y = \mathrm{sn}\, v$ とおくと，

$$\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}},$$
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} = -\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}v} = -\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}.$$

これらの式から，

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}u^2} = -(1+k^2)x + k^2x^3, \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}u^2} = -(1+k^2)y + k^2y^3,$$
$$y\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}u^2} - x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}u^2} = k^2xy(x^2-y^2), \tag{1}$$
$$y^2\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\right)^2 - x^2\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right)^2 = -(x^2-y^2)(1-k^2x^2y^2). \tag{2}$$

(1)÷(2) を作ることにより，

sn の加法定理の証明

$$\frac{y\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}u^2}-x\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}u^2}}{y^2\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\right)^2-x^2\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right)^2}=-\frac{k^2xy}{1-k^2x^2y^2},$$

$$\frac{y\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}u^2}-x\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}u^2}}{y\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}-x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}}=-\frac{k^2xy\left(y\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}+x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right)}{1-k^2x^2y^2},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\log\left(y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\log(1-k^2x^2y^2),$$

$$\therefore\quad \frac{y\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}-x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}}{1-k^2x^2y^2}=\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{cn}v\operatorname{dn}v+\operatorname{sn}v\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u}{1-k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2v}=\mathrm{const.}$$

$u=c$, $v=0$ とおいて，const. $=\operatorname{sn}c(=\operatorname{sn}(u+v))$ を得る． ■

cn, dn の加法定理

cn, dn の加法定理

$$\mathrm{cn}(u+v) = \frac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v - \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,v}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{sn}^2\,v},$$

$$\mathrm{dn}(u+v) = \frac{\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v - k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,v}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{sn}^2\,v}.$$

（証明）　動画内のミスプリは青字のように修正します.

$$\mathrm{cn}^2(u+v) = 1 - \left(\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u + \mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{D}\right)^2, \quad D = 1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{sn}^2\,v,$$

$$D = \mathrm{cn}^2\,u + \mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{dn}^2\,v = \mathrm{cn}^2\,v + \mathrm{sn}^2\,v\,\mathrm{dn}^2\,u$$

が示されるので,

cn, dn の加法定理の証明

$$
\begin{aligned}
\mathrm{cn}^2(u+v) &= \frac{1}{D^2}\Big\{(\mathrm{cn}^2 u + \mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{dn}^2 v)(\mathrm{cn}^2 v + \mathrm{sn}^2 v\,\mathrm{dn}^2 u) \\
&\qquad - (\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u + \mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u)^2\Big\} \\
&= \left(\frac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v - \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,v}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v}\right)^2, \\
\mathrm{cn}(u+v) &= \pm\frac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v - \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,v}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v}.
\end{aligned}
$$

複号 $\pm$ のどちらを取るか考える．$u \approx 0$, $v \approx 0$ のとき，左辺 ≈ 1，右辺 $\approx \pm 1$ だから，$\pm$ のうち $+$ をとる．

$*$ この符号の選び方には問題がある（後述）．

$$
D = \mathrm{dn}^2 u + k^2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{cn}^2 v = \mathrm{dn}^2 v + k^2\,\mathrm{sn}^2 v\,\mathrm{cn}^2 u
$$

を用いれば，dn の加法定理も同様にして導き出される． ■

sn, cn, dn の定義域の拡張

$$\mathrm{sn}(u+v) = \frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v + \mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{sn}^2\,v},$$

$$\mathrm{cn}(u+v) = \frac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v - \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,v}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{sn}^2\,v},$$

$$\mathrm{dn}(u+v) = \frac{\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v - k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,v}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{sn}^2\,v}.$$

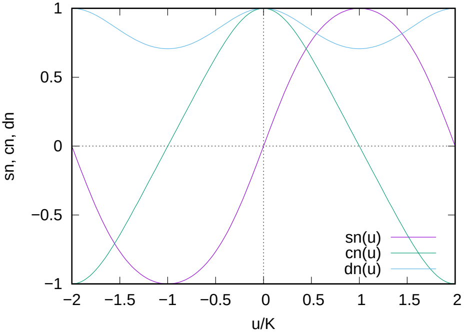
これを用いて，$\mathrm{sn}\,u, \mathrm{cn}\,u, \mathrm{dn}\,u$ の定義域を $|u| \leq K$ の外に拡張する．
上の加法定理に形式的に $v = \pm K$ を代入して，次を得る．

$$\mathrm{sn}(u \pm K) = \pm\frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}, \quad \mathrm{cn}(u \pm K) = \mp k'\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}, \quad \mathrm{dn}(u \pm K) = \frac{k'}{\mathrm{dn}\,u}$$

$$(\ k' = \sqrt{1-k^2} \quad \text{補母数}\ ).$$

これらを用いて，$\mathrm{sn}\,u, \mathrm{cn}\,u, \mathrm{dn}\,u$ の定義域を $|u| \leq 2K$ まで拡張する．

sn, cn, dn の定義域の拡張



$\mathrm{sn}(u;k), \mathrm{cn}(u;k), \mathrm{dn}(u;k)$ ($k=\sqrt{0.5}$, $|u| \le 2K$) のグラフ.

$|u| \le 2K$ 全体において $\mathrm{sn}\, u$ は奇関数，$\mathrm{cn}\, u, \mathrm{dn}\, u$ は偶関数であること，および,

$$\mathrm{sn}(2K-u) = \mathrm{sn}\, u, \quad \mathrm{cn}(2K-u) = -\mathrm{cn}\, u, \quad \mathrm{dn}(2K-u) = \mathrm{dn}\, u$$

が成り立つことに注意.

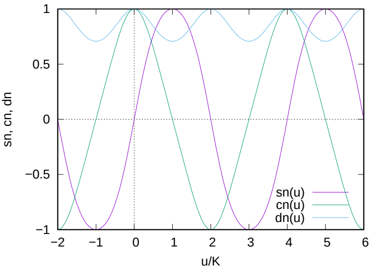
sn, cn, dn の定義域の拡張

加法定理を使って，$\mathrm{sn}\, u, \mathrm{cn}\, u, \mathrm{dn}\, u$ の定義域をどんどん拡張し，
ついには $-\infty < u < \infty$ 全体に渡って $\mathrm{sn}\, u, \mathrm{cn}\, u, \mathrm{dn}\, u$ が定義される．

$$\mathrm{sn}(u+2K) = -\mathrm{sn}\, u, \quad \mathrm{cn}(u+2K) = -\mathrm{cn}\, u, \quad \mathrm{dn}(u+2K) = \mathrm{dn}\, u,$$
$$\mathrm{sn}(u+4K) = \mathrm{sn}\, u, \quad \mathrm{cn}(u+4K) = \mathrm{cn}\, u.$$

$\mathrm{sn}\, u, \mathrm{cn}\, u$ は周期 $4K$ の，$\mathrm{dn}\, u$ は周期 $2K$ の周期関数である．

$\mathrm{sn}\, u, \mathrm{cn}\, u, \mathrm{dn}\, u$ は $-\infty < u < \infty$ で連続である．



sn, cn, dn ($k = \sqrt{0.5}$) のグラフ．

補遺

今までの議論で「心に引っかかる」点．

1. $\mathrm{cn}\,u$ の定義で $\sqrt{\cdot}$ を使う（ $\mathrm{cn}\,u = \sqrt{1-\mathrm{sn}^2\,u}$ ）．
   $K < u < 3K$ で $\mathrm{cn}\,u < 0$ となり，$\sqrt{\cdot} \geq 0$ に反する．
2. cn の加法定理の導出．$\mathrm{cn}^2(u+v) = 1 - \mathrm{sn}^2(u+v)$ より，

$$\mathrm{cn}(u+v) = \pm\frac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v - \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,v}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{sn}^2\,v}$$

を得，$u \approx 0$, $v \approx 0$ での両辺の振る舞いから，$\pm$ のうち $+$ を選んだ．

これができるには，両辺が解析関数でなければならない．
（例）次の $f(x)$, $g(x)$ は $-\infty < x < \infty$ で C^∞ 級である．

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2) & (\, x > 0 \,) \\ 0 & (\, x \leq 0 \,), \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -\exp(-1/x^2) & (\, x > 0 \,) \\ 0 & (\, x \leq 0 \,), \end{cases}$$

$f(x) = g(x)$ ($\forall x < 0$)，しかし，$f(x) \not\equiv g(x)$ である．

補遺

1. 振幅関数 $\operatorname{am} u = \operatorname{am}(u;k)$ を導入する.

$$\psi = \operatorname{am} u \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad u = \int_0^{\psi} \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}.$$

そして，$\operatorname{sn}, \operatorname{cn}$ を次で定義する.

$$\operatorname{sn} u \equiv \sin(\operatorname{am} u), \quad \operatorname{cn} u \equiv \cos(\operatorname{am} u).$$

$\operatorname{sn}(u+2K) = -\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn}(u+2K) = -\operatorname{cn} u$ の証明.

$$\begin{aligned} u+2K &= \int_0^{\psi} \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} \\ &= \int_0^{\psi+\pi} \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} \end{aligned}$$

より，$\psi+\pi = \operatorname{am}(u+2K)$.

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(u+2K) &= \sin[\operatorname{am}(u+2K)] = \sin(\psi+\pi) = -\sin\psi = -\operatorname{sn} u, \\ \operatorname{cn}(u+2K) &= \cos[\operatorname{am}(u+2K)] = \cos(\psi+\pi) = -\cos\psi = -\operatorname{cn} u. \end{aligned}$$

補遺

2. 加法定理の証明の仕方を変える．

J. V. Armitage & W. F. Eberlein: Elliptic Functions, Cambridge Univ. Press (2006)

の第 2 章の証明を用いれば，さっきの問題点には出くわさない．

これまでのまとめ

- 定義

$$x = \mathrm{sn}\, u = \mathrm{sn}(u;k) \overset{\text{def}}{\iff} u = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$\mathrm{cn}\, u = \mathrm{cn}(u;k) = \sqrt{1-\mathrm{sn}^2\, u}, \quad \mathrm{dn}\, u = \mathrm{dn}(u;k) = \sqrt{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\, u},$$

$$k\ (\, 0 < k < 1\,) \quad \text{母数}, \quad k' = \sqrt{1-k^2} \quad \text{補母数}.$$

- $\mathrm{sn}\, u$ は奇関数，$\mathrm{cn}\, u, \mathrm{dn}\, u$ は偶関数である.
- 加法定理

$$\mathrm{sn}(u+v) = \frac{\mathrm{sn}\, u\,\mathrm{cn}\, v\,\mathrm{dn}\, v + \mathrm{sn}\, v\,\mathrm{cn}\, u\,\mathrm{dn}\, u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\, u\,\mathrm{sn}^2\, v},$$

$$\mathrm{cn}(u+v) = \frac{\mathrm{cn}\, u\,\mathrm{cn}\, v - \mathrm{sn}\, u\,\mathrm{dn}\, u\,\mathrm{sn}\, v\,\mathrm{dn}\, v}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\, u\,\mathrm{sn}^2\, v},$$

$$\mathrm{dn}(u+v) = \frac{\mathrm{dn}\, u\,\mathrm{dn}\, v - k^2\,\mathrm{sn}\, u\,\mathrm{cn}\, u\,\mathrm{sn}\, v\,\mathrm{cn}\, v}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\, u\,\mathrm{sn}^2\, v}.$$

これまでのまとめ

- sn, cn, dn の性質

$$\mathrm{sn}(u+K)=\frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u},\quad \mathrm{cn}(u+K)=-k'\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,u},\quad \mathrm{dn}(u+K)=\frac{k'}{\mathrm{dn}\,u},$$
$$\mathrm{sn}(u+2K)=-\mathrm{sn}\,u,\quad \mathrm{cn}(u+2K)=-\mathrm{cn}\,u,\quad \mathrm{dn}(u+2K)=\mathrm{dn}\,u,$$
$$\mathrm{sn}(u+4K)=\mathrm{sn}\,u,\quad \mathrm{cn}(u+4K)=\mathrm{cn}\,u.$$

- sn, cn は周期 $4K$ の，dn は周期 $2K$ の周期関数である．

次回から，Jacobi の楕円関数を複素変数に拡張します．