楕円関数論・番外編 (1)
算術幾何平均と楕円積分

緒方　秀教

電気通信大学　大学院情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻

2020 年 11 月 28 日（土）

算術幾何平均

a, b：正の数.

$$\text{算術平均} \quad a_1 = \frac{a+b}{2}, \quad \text{幾何平均} \quad b_1 = \sqrt{ab},$$
$$a_1 \geq b_1.$$

- a_1, b_1 の算術平均 a_2，幾何平均 b_2.
- a_2, b_2 の算術平均 a_3，幾何平均 b_3.
- $\ldots$

算術平均・幾何平均を取る操作を繰り返す

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad (\, n = 0, 1, 2, \ldots;\ a_0 = a,\ b_0 = b\,).$$

$$b = b_0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq a_2 \leq a_1 \leq a_0 = a.$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \quad \text{となる.}$$

算術幾何平均 (arithmetic-geometric-mean)

a, b の算術幾何平均　$M(a, b) \equiv \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$

（$\lim a_n = \lim b_n$ となる理由）

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - \sqrt{a_n b_n} \leq \frac{a_n + b_n}{2} - b_n = \frac{1}{2}(a_n - b_n),$$

$$\therefore \quad a_n - b_n \leq \frac{1}{2^n}(a - b) \to 0 \quad (\, n \to \infty\,).$$

$a_n, b_n \to M(a,b)$ の収束は極めて速い．

（例）$a = a_0 = 1, b = b_0 = 1/\sqrt{2}$ の場合：

n	a_n	b_n
0	1.00000 00000 00000 00000 00000	0.70710 67811 86547 52440 08443
1	0.85355 33905 93273 76220 04221	0.84089 64152 53714 54303 11254
2	0.84722 49029 23494 15261 57738	0.84720 12667 46891 46040 36315
3	0.84721 30848 35192 80650 97026	0.84721 30847 52765 36670 42981
4	0.84721 30847 93979 08660 70003	0.84721 30847 93979 08660 59979
5	0.84721 30847 93979 08660 64991	0.84721 30847 93979 08660 64991

第 1 種完全楕円積分

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$k\ (0 < k < 1)$ 母数.

第 1 種完全楕円積分の算術幾何平均による計算式

$$K(k) = \frac{\pi/2}{M(1, k')}, \quad k' = \sqrt{1-k^2} \quad \text{補母数.}$$

数値計算例（倍精度計算）：小数点以下 15 位まで真値と合っている.

k	$K(k)$ 算術幾何平均	$K(k)$ 台形則
0.1	1.57474 55615 17356	1.57474 55615 17356
$\sqrt{0.5}$	1.85407 46773 01372	1.85407 46773 01372
0.9	2.28054 91384 22770	2.28054 91384 22770

証明

* 梅村浩：楕円関数論—楕円曲線の解析学 (増補新装版)，東京大学出版会（2020 年）に載っている証明.

$$I(a,b) \equiv \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}} \quad (\, a \geq b > 0 \,)$$

とおくと，

$$K(k) = I(1, k').$$

この $I(a,b)$ に対し，

$$I(a,b) = I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) \tag{1}$$

が示されるから，最初のように a, b から算術平均・幾何平均をとる操作を繰り返して数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を生成すると，

$$I(a,b) = I(a_1,b_1) = I(a_2,b_2) = \cdots = I(a_n,b_n),$$

よって，

$$I(a,b) = \lim_{n\to\infty} I(a_n,b_n) = I(M(a,b), M(a,b)) = \frac{\pi/2}{M(a,b)},$$

$$\therefore \quad K(k) = I(1,k') = \frac{\pi/2}{M(1,k')}.$$

証明

(1) の証明.

$$I(a,b) \equiv \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}}.$$

$\theta \to t = b\tan\theta$ と変数変換すると,

$$I(a,b) = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}}.$$

さらに, $t \to u = (t - ab/t)/2$ と変数変換すると,

$$\begin{aligned} I(a,b) &= 2\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(u^2+ab)[4u^2+(a+b)^2]}} \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\left[u^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right][u^2+(\sqrt{ab})^2]}} \\ &= I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right). \end{aligned}$$

■