数値解析と複素関数論 (1)
Lagrange 補間式は複素積分で表せる

緒方　秀教

電気通信大学　大学院情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻

2020 年 11 月 26 日（木）

Lagrange 補間

- $f(x)$: 未知関数.
- 点 $x_1, \ldots, x_N$（標本点）における値 $f(x_k)$ はわかっている.

$x \neq x_k$ ($k = 1, \ldots, N$) における関数値 $f(x)$ を近似計算したい.

(Lagrange) 補間

- 関数 $f(x)$ の**補間** (interpolation)
  標本点での値 $f(x_k)$ ($k = 1, \ldots, N$) をもとに関数値 $f(x)$ を簡単な関数で近似すること.
- **Lagrange 補間** : 多項式による補間.

Lagrange 補間

Lagrange 補間多項式 $f_N(x)$ の表式

Lagrange 補間多項式は次式で表される.

$$f_N(x) = \sum_{k=1}^{N} f(x_k) \frac{W(x)}{W'(x_k)(x - x_k)},$$

$$W(x) = \prod_{k=1}^{N} (x - x_k) \quad \text{標本点を零点にもつ多項式.}$$

$$\left. \frac{W(x)}{W'(x_k)(x - x_k)} \right|_{x = x_j} = \begin{cases} 1 & (\, j = k \,) \\ 0 & (\, j \neq k \,) \end{cases}$$

に注意すれば，$f_N(x_j) = f(x_j)$ ($j = 1, \ldots, N$) がわかる.

Lagrange 補間の複素積分表示

閉区間 $I = [a, b]$ 上での $f(x)$ の補間を考えることにする．

$$a \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_N \leq b.$$

$f(x)$ が複素解析関数（正則関数）ならば，
Lagrange 補間 $f_N(x)$ を複素積分で表すことができる．

Lagrange 補間の複素積分表示

閉区間 $I = [a, b]$ 上での $f(x)$ の補間を考えることにする．

$$a \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_N \leq b.$$

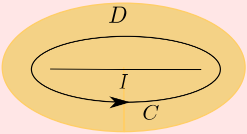
$f(x)$ が複素解析関数（正則関数）ならば，
Lagrange 補間 $f_N(x)$ を複素積分で表すことができる．

定理 1：Lagrange 補間の複素積分表示

- D：区間 I を含む複素領域．
- $f(z)$：D 上の解析関数．

$x \in I = [a, b]$ とすると

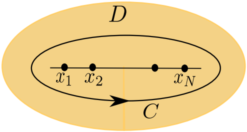
$$f_N(x) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C f(z) \frac{W(z) - W(x)}{(z - x)W(z)} \mathrm{d}z,$$



C：領域 D に含まれ区間 I を
反時計回りに囲む閉積分路．

（証明）留数定理による複素積分計算による．

$$I = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C f(z) \frac{W(z) - W(x)}{(z - x)W(z)} \mathrm{d}z.$$



被積分関数は C およびその内部を含む領域で $x_1, \ldots, x_N$ を除いて解析的で，$x_1, \ldots, x_N$ に 1 位の極を持つ．よって，留数定理より

$$I = \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}(x_k).$$

$*$ $z = x$ は除去可能特異点である．

$$\lim_{z \to x} \frac{W(z) - W(x)}{z - x} = W'(x).$$

Lagrange 補間の複素積分表示（証明）

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}(x_k) &= \lim_{z \to x_k} (z - x_k) f(z) \frac{W(z) - W(x)}{(z - x) W(z)} \\
&= f(x_k) \frac{0 - W(x)}{W'(x_k)(x_k - x)} \\
&= f(x_k) \frac{W(x)}{W'(x_k)(x - x_k)}.
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \quad I = \sum_{k=1}^{N} f(x_k) \frac{W(x)}{W'(x_k)(x - x_k)} = f_N(x).
$$

■

補間誤差の複素積分表示

定理 2：補間誤差の複素積分表示

定理 1 と同じ条件下で

$$f(x) - f_N(x) = \frac{W(x)}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{(z-x)W(z)}\mathrm{d}z \quad (\, x \in I = [a,b]\,).$$

（証明）Cauchy の積分公式により，

$$\begin{aligned} f(x) - f_N(x) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{z-x}\mathrm{d}z - \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{W(z)-W(x)}{(z-x)W(z)} f(z)\mathrm{d}z \\ &= \cdots \end{aligned}$$

補間誤差の複素積分表示

定理 2：補間誤差の複素積分表示

定理 1 と同じ条件下で

$$f(x) - f_N(x) = \frac{W(x)}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{(z-x)W(z)} \mathrm{d}z \quad (\, x \in I = [a,b] \,).$$

（証明）Cauchy の積分公式により，

$$\begin{aligned} f(x) - f_N(x) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{z-x} \mathrm{d}z - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{W(z)-W(x)}{(z-x)W(z)} f(z) \mathrm{d}z \\ &= \cdots \end{aligned}$$

補間精度と関数の解析性

- 補間誤差は $f(z)$ の解析性に大きく依存する
  （どの範囲で解析的か，極はどこにあるか，etc.）
- 補間誤差の複素積分表示を用いて，理論誤差評価を行える．