円周率の数値計算
電気通信大学オープンキャンパス

緒方　秀教

電気通信大学　大学院情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻

2020 年 11 月

はじめに

数学において，古代から現代まで多くの数学者が円周率 π の計算に挑戦してきた．
ここでは，その円周率計算の歴史を振り返り，同時に「数値計算」という学術分野の一端の紹介も兼ねたい．

円周率 π の計算法

1. 正多角形の周長により評価する（古代，和算）．
2. $\arctan x$ のグレゴリー級数による計算法．
3. 算術幾何平均．
4. ラマヌジャンの公式．

古代の円周率

- 紀元前 2000 年頃のリンドパピルス.

$$\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3.1604\ldots$$

- 旧約聖書：$\pi = 3$ を示す記述：

  彼はまた海を鋳（い）で造った．縁から縁まで *10* キュッピットであって，周囲は円形をなし，高さは *5* キュッピットで，その周囲は網をもって測ると，*30* キュッピットあった．
  （歴代志下，*4.2*）

古代の円周率

古代における円周率 π の計算は，正多角形の周長により評価する方法が主流であった．

古代の円周率

古代における円周率 π の計算は，正多角形の周長により評価する方法が主流であった．

（余談）2003 年，東京大学入試問題

円周率が 3.05 より大きいことを証明せよ．

多くの受験参考書等に載っている解答は，円に内接する正 12 ／ 8 角形の周長により評価する方法である．

古代の円周率

古代における円周率 π の計算は，正多角形の周長により評価する方法が主流であった．

（余談）2003 年，東京大学入試問題

円周率が 3.05 より大きいことを証明せよ．

多くの受験参考書等に載っている解答は，円に内接する正 12 ／ 8 角形の周長により評価する方法である．

- アルキメデス (Archimedes)：
  円に内接／外接する正 96 角形の周長より，

$$3.1410\ldots = 3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7} = 3.1427\ldots$$

和算：関孝和の円周率計算

関孝和 (1640?–1708) の円周率計算法

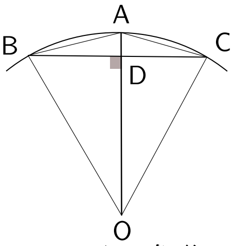
単位円に内接する正 2^n 角形の一辺の長さを a_n とすれば,

$$\pi = \lim_{n\to\infty} 2^{n-1} a_n.$$

a_n に対する漸化式を求める.

$$\begin{aligned}
\mathrm{OD} &= \sqrt{1-(a_n/2)^2}, \\
\mathrm{AD} &= 1-\mathrm{OD} \\
&= 1-\sqrt{1-(a_n/2)^2}, \\
\mathrm{CD} &= a_n/2, \\
{a_{n+1}}^2 &= \mathrm{AC}^2 = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{CD}^2 \\
&= \left(1-\sqrt{1-(a_n/2)^2}\right)^2 + (a_n/2)^2 \\
&= 2-\sqrt{4-{a_n}^2},
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad a_{n+1} = \sqrt{2-\sqrt{4-{a_n}^2}}.$$



BC	正 2^n 角形の一辺
BA, AC	正 2^{n+1} 角形の辺
O	単位円の中心

和算：関孝和の円周率計算

円周率の近似数列 $\{\pi_n\}$（関孝和）

$$a_2 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - {a_n}^2}} \quad (\, n = 2, 3, \ldots\,),$$
$$\pi_n = 2^{n-1} a_n \to \pi \quad (\, n \to \infty\,).$$

これを使ってパソコンで π の近似値を計算した．

n	π_n	相対誤差
10	3.14158 77252 77159 70062 88542 62702	2×10^{-6}
20	3.14159 26535 85093 23106 89057 95336	2×10^{-12}
30	3.14159 26535 89793 23398 03670 44950	1×10^{-18}
40	3.14159 26535 89793 23846 26391 08648	1×10^{-24}
π の厳密値	3.14159 26535 89793 23846 26433 83280 ...	

* 関孝和は $n = 17$ まで計算したそうである．

和算：関孝和の円周率計算とエイトケン加速

さらに，関孝和は次の事実に気づいた．

$$\pi_{15} = 3.14159\,26487\,76985\,66948\,51079\,69277\ldots,$$
$$\pi_{16} = 3.14159\,26523\,86591\,34580\,35255\,21058\ldots,$$
$$\pi_{17} = 3.14159\,26532\,88992\,76527\,19430\,42174\ldots,$$
$$\frac{\pi_{17}-\pi_{16}}{\pi_{16}-\pi_{15}} = 0.25000\,00001\,07716\,23496\,75673\,20818\ldots$$

$\pi_{n+1}-\pi_n$ は公比≒ 0.25 の等比数列に近づいていくようだ！

関はこの事実から，π_{17} までの値を使ってさらに良い π の近似値を求めた．$r = (\pi_{17}-\pi_{16})/(\pi_{16}-\pi_{15})$ とおいて，

$$\begin{aligned}\pi &= \pi_{16} + (\pi_{17}-\pi_{16}) + (\pi_{18}-\pi_{17}) + \cdots \\ &\simeq \pi_{16} + (\pi_{16}-\pi_{15})(r + r^2 + r^3 + \cdots) \\ &= \pi_{16} + (\pi_{16}-\pi_{15})\frac{r}{1-r},\end{aligned}$$

$$\pi \simeq \pi_{16} + (\pi_{16} - \pi_{15})\frac{r}{1-r}$$

$$= \pi_{16} + (\pi_{16} - \pi_{15})\frac{\dfrac{\pi_{17} - \pi_{16}}{\pi_{16} - \pi_{15}}}{1 - \dfrac{\pi_{17} - \pi_{16}}{\pi_{16} - \pi_{15}}}$$

$$\pi \simeq \pi_{16} - \frac{(\pi_{16} - \pi_{15})(\pi_{17} - \pi_{16})}{(\pi_{17} - \pi_{16}) - (\pi_{16} - \pi_{15})}.$$

今の議論を一般化すると，π_n よりもっと速く収束する π の近似数列 π'_n が得られる：

$$\pi'_n = \pi_{n+1} - \frac{(\pi_{n+1} - \pi_n)(\pi_{n+2} - \pi_{n+1})}{(\pi_{n+2} - \pi_{n+1}) - (\pi_{n+1} - \pi_n)},$$

和算：関孝和の円周率計算とエイトケン加速

改良された近似数列 π'_n で π の近似値を求めた．

n	π_n（改良前）	相対誤差
10	3.14158 77252 77159 70062 88542 62702	2×10^{-6}
20	3.14159 26535 85093 23106 89057 95336	2×10^{-12}
30	3.14159 26535 89793 23398 03670 44950	1×10^{-18}
38	3.14159 26535 89793 23846 25749 89170	2×10^{-23}
n	π'_n（改良後）	相対誤差
10	3.14159 26535 89938 19856 11615 72583	5×10^{-14}
20	3.14159 26535 89793 23846 26435 15120	4×10^{-26}
30	3.14159 26535 89793 23846 26433 83280	4×10^{-38}
38	3.14159 26535 89793 23846 26433 83280	9×10^{-48}
厳密値	3.14159 26535 89793 23846 26433 83280 . . .	

確かに，改良された数列 π'_n は π_n より速く収束している．

和算：関孝和の円周率計算とエイトケン加速

エイトケン (Aitken) 加速

数列 $\{a_n\}$ の極限 $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ を求めたいとき，$\{a_n\}$ よりもっと速く a に収束する数列 $\{a'_n\}$ を下記で求め，極限 a を効率よく求める方法．

$$a'_n = a_n - \frac{(a_{n+1} - a_n)^2}{a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n}.$$

- 日本では関孝和が 1680 年に発見した（当時は「増約術」と呼んだ）．
- 欧州では 1926 年にエイトケンが最初にエイトケン加速法を用いた．1876 年に H. von Nägelsbach が最初に用いたという話も．
- 関がエイトケン加速を発見した事実は，Brezinski が再発見した．

和算で最初の円周率公式

建部賢弘 (1772)

$$\pi^2 = 9\left(1 + \frac{1^2}{3\cdot 4} + \frac{1^2\cdot 2^2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \frac{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} + \cdots\right).$$

π_n：右辺を第 0 ∼ n 項で打ち切って計算された π の近似値.

n	π_n	相対誤差
4	3.14148 50901 17183 96036 66075	3×10^{-5}
8	3.14159 24555 12120 93228 34703	6×10^{-8}
12	3.14159 26531 19234 49522 63975	1×10^{-10}
16	3.14159 26535 88526 71739 89080	4×10^{-13}
20	3.14159 26535 89789 56596 43702	1×10^{-15}
40	3.14159 26535 89793 23846 26434	4×10^{-28}
100	3.14159 26535 89793 23846 26434	8×10^{-65}
188	3.14159 26535 89793 23846 26434	7×10^{-116}

17 世紀の微積分の発見により，様々な関数の無限級数展開が得られた．

$\arctan x$ ：tan の逆関数． $y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y$.

$\arctan x$ に対するグレゴリー (Gregory) 級数

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots .$$

$x = 1$ を代入すると（$\tan(\pi/4) = 1$ より $\arctan 1 = \pi/4$ であるから），

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots .$$

ただし，この級数は収束が遅く，円周率計算には使えない．
（式自体は美しく神秘的であるが…）

arctan x のグレゴリー級数による方法

マチン (Machine) の公式

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}.$$

Machine はこの等式において，Gregory 級数を有限桁で打ち切って arctan を計算することにより，π を 100 桁計算した．

グレゴリー級数を第 0 ∼ n 項で打ち切って arctan を計算することにより得られる π の近似値を π_n とする．

n	π_n	相対誤差
2	3.14162 10293 25034 42504 68325	9×10^{-6}
4	3.14159 26824 04399 51724 02598	9×10^{-9}
6	3.14159 26536 23554 76199 55046	6×10^{-11}
8	3.14159 26535 89835 84748 57007	1×10^{-14}
10	3.14159 26535 89793 29474 73749	2×10^{-17}
12	3.14159 26535 89793 23853 93246	2×10^{-20}
70	3.14159 26535 89793 23846 26434	4×10^{-102}

$\arctan x$ のグレゴリー級数による方法

同種の方法.

- クリンゲンシュテルナ (Klingenstierna,1730)

$$\frac{\pi}{4} = 8\arctan\frac{1}{10} - \arctan\frac{1}{239} - 4\arctan\frac{1}{515}.$$

- ガウス (Gauss, 1863)

$$\frac{\pi}{4} = 12\arctan\frac{1}{18} + 8\arctan\frac{1}{57} - 5\arctan\frac{1}{239}.$$

- シュテルメル (Störmer,1896)

$$\frac{\pi}{4} = 6\arctan\frac{1}{8} + 2\arctan\frac{1}{57} + \arctan\frac{1}{239}.$$

- 高野喜久雄 (1982)

$$\frac{\pi}{4} = 12\arctan\frac{1}{49} + 32\arctan\frac{1}{57} - 5\arctan\frac{1}{239} + 12\arctan\frac{1}{110443}.$$

グレゴリー級数による方法

- 有理数の四則演算だけでできる.
- コンピュータが出現する以前の π の数値計算法.

高野の方法で π の近似値を計算した. π_n の定義は前と同様.

n	π_n	相対誤差
2	3.14159 26536 09251 91213 79438	6×10^{-12}
4	3.14159 26535 89793 24014 20633	5×10^{-19}
6	3.14159 26535 89793 23846 26436	6×10^{-26}
8	3.14159 26535 89793 23846 26434	7×10^{-33}
	…	
30	3.14159 26535 89793 23846 26434	8×10^{-108}

意外と速く収束する.

算術幾何平均による方法

$a, b > 0$ の算術平均（相加平均），幾何平均（相乗平均）．

$$\text{算術平均：}\ \frac{1}{2}(a+b), \quad \text{幾何平均：}\ \sqrt{ab}.$$

算術平均・幾何平均をとる操作を繰り返して
数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を生成する：

$$a_0 = a, \quad b_0 = b,$$
$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n), \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad (\ n = 0, 1, 2, \ldots\ ).$$

$$b_0 \le b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_n \le \cdots \le a_n \le \cdots \le a_2 \le a_1 \le a_0,$$
$$a_n - b_n \le \frac{1}{2^n}(a_0 - b_0) \to 0 \quad (\ n \to \infty\ ).$$

$\therefore \quad n \to \infty$ で a_n, b_n は同じ値に収束する⋯算術幾何平均

$$a, b \text{ の算術幾何平均} \quad M(a, b) = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

算術幾何平均による方法

$a_n, b_n \to M(a,b)$ の収束は極めて速い．

（例）$a = a_0 = 1, b = b_0 = 1/\sqrt{2}$ の場合：

n	a_n	b_n
0	1.00000 00000 00000 00000 00000	0.70710 67811 86547 52440 08443
1	0.85355 33905 93273 76220 04221	0.84089 64152 53714 54303 11254
2	0.84722 49029 23494 15261 57738	0.84720 12667 46891 46040 36315
3	0.84721 30848 35192 80650 97026	0.84721 30847 52765 36670 42981
4	0.84721 30847 93979 08660 70003	0.84721 30847 93979 08660 59979
5	0.84721 30847 93979 08660 64991	0.84721 30847 93979 08660 64991

算術幾何平均による方法

楕円積分の理論より，算術幾何平均による円周率の計算法が得られる．

$$a_0 = 1, \quad b_0 = 1/\sqrt{2},$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n), \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad c_n = \sqrt{a_n^2 - b_n^2} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

算術幾何平均による円周率の表式

$$\pi = \frac{2M(1, 1/\sqrt{2})^2}{1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^n {c_n}^2}.$$

算術幾何平均による円周率の近似式

$$\pi \simeq \pi_N = \frac{2{a_{N+1}}^2}{1 - \sum_{n=0}^{N} 2^n {c_n}^2}.$$

算術幾何平均による方法

$\pi_N \to \pi$ は極めて収束が速い．

N	π_N	相対誤差
0	2.91421 35623 73095 04880 16887 24209 69807 85696 71875	7×10^{-2}
1	3.14057 92505 22168 24831 13312 68975 82331 17734 40237	3×10^{-4}
2	3.14159 26462 13542 28214 93444 31982 69577 43144 37223	2×10^{-9}
3	3.14159 26535 89793 23827 95127 74801 86397 43812 25504	6×10^{-20}
4	3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 14678	2×10^{-41}
5	3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399	8×10^{-85}
6	3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399	7×10^{-172}
	$\cdots$	
9	3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399	8×10^{-1001}

$*$ $\pi \simeq \pi_N$ の誤差評価：

$$\pi - \pi_N \leq \frac{\pi^2 2^{N+4} \mathrm{e}^{-\pi 2^{N+1}}}{M(1, 1/\sqrt{2})^2}, \quad \pi - \pi_{N+1} \leq \frac{2^{-(N+1)}}{\pi^2}(\pi - \pi_N)^2.$$

各段で $\pi_N \simeq \pi$ の有効桁数が倍になっている．

ラマヌジャン

ラマヌジャン (Srinivasa Aiyangar Ramanujan)

- 1887〜1920．インド出身．
- 港湾事務所の事務員の仕事をしながら，独学で数学の研究に勤しむ．
- 英国数学者ハーディ (Hardy) にその才能を見いだされて渡英，共同研究．
- 常人ではとても思いつかない摩訶不思議な多くの公式．
  ラマヌジャンいわく，ナーマギリ女神が夢の中で教えてくれたと…

ラマヌジャン（郵便切手にもなっている）

画像は，MacTutor History of Mathematics
(https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/) より転載.

ラマヌジャン (Ramanujan)

円周率の公式（ラマヌジャン, 1914）

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{99^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(4^n n!)^4} \frac{1103 + 26390n}{99^{4n}}.$$

$$\frac{4}{\pi} = \frac{1}{882} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (4n)!}{(4^n n!)^4} \frac{1123 + 21460n}{882^{2n}}.$$

こんな公式，どうすれば思いつくのやら…？

1 番目の公式で π を計算してみた．
第 0 ～ n 項の部分和から求めた π の近似値を π_n とする．

n	π_n	誤差
1	3.14159 26535 89793 87799 89058 26306	2×10^{-16}
5	3.14159 26535 89793 23846 26433 83280	2×10^{-48}
10	$\cdots$	1×10^{-88}
50	驚異的な収束の速さ！	3×10^{-408}
π の厳密値	3.14159 26535 89793 23846 26433 83280 ...	

Chudnovsky の公式：ラマヌジャンタイプの公式

Chudnovsky の公式 (1987)

$$\frac{1}{\pi} = \frac{12}{640320^{3/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (6n)!(13591409 + 545140134n)}{(3n)!(n!)^3 640320^{3n}}.$$

π_n: 第 0 ∼ n 項の部分和から得られる π の近似値.

n	π_n	相対誤差
1	3.14159 26535 89793 23846 26433 83587 35068 84758 66345	1×10^{-28}
2	3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 67678	6×10^{-43}
3	3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399	3×10^{-57}
10		1×10^{-156}
20	ラマヌジャンの公式よりもっと驚異的な速さで収束する！	1×10^{-298}
50		3×10^{-724}
70		7×10^{-1002}

円周率計算の記録

年	計算者	桁数	要した時間
	Archimedes	3	
	van Ceulen	34	一生
1706	Machin	100	
1844	Dase	205	8 時間
1947	Ferguson	808	
	（電子計算機時代）		
1949	Reitwiesner	2,037	70 時間
1958	Genuys	10,000	100 分
1961	Shanks, Wrench	100,000	9 時間
1973	Gouilloud, Bouyer	1,000,000	24 時間
1982	金田，吉野，田村	16,000,000	30 時間
	...		
2010	Yee, 近藤	5,000,000,000,000	90 日
2019	Yee, 岩尾	31,415,926,535,897	118 日
2020	Yee, Mullican	50,000,000,000,000	303 日

終わりに

- みなさんも今回紹介した計算公式を使って，実際に円周率計算をやってみてほしい．
  数値計算：実際に自分の手を動かしてやってみると楽しい．
  数値計算は実験科学．
- 円周率計算の歴史は，数学・計算機科学の発展とともにある．
  ∴ 円周率計算は重要な学術分野である．
- 多倍長計算：exflib がお勧めのライブラリ．
  - H. Fujiwara: Exflib information,
    http://www-an.acs.i.kyoto-u.ac.jp/~fujiwara/exflib/
  - exflib を含めた多倍長計算に関する解説．
    桂田祐史：多倍長計算ノート，
    http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/on-multiprecision.pdf

参考文献・Web サイト

- 梅村浩：楕円関数論–楕円曲線の解析学，東京大学出版会，2000 年.
- 円周率.jp：http://円周率.jp/formula/ramanujan.html
- 建部賢弘の「綴術算経」(Imujii's Page)：https://sites.google.com/site/seijiimura/home/16-he-suanno-yan-jiu/03-jian-bu-xian-hongno-zhui-shu-suan-jing
- コラム　円周率（江戸の数学）：https://www.ndl.go.jp/math/s1/c4.html
- Chudnovsky の円周率計算公式の解説（大学 2∼3 年で習う複素関数論の知識があれば読める）．
  L. Milla: A detailed proof of the Chudnovsky formula with means of basic complex analysis, arXiv:1809.00533, 2020.