

# 佐藤超函数論と数値解析への応用

## 電気通信大学オープンキャンパス

緒方秀教

電気通信大学大学院 情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻

2020 年 11 月

# 序：佐藤超函数とは…

## Dirac のデルタ関数

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & (x = 0) \\ 0 & (x \neq 0), \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \delta(x) dx = \varphi(0).$$

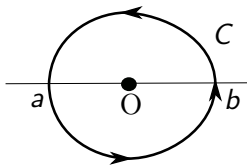
- 数学的な正当化…佐藤超函数の理論（, Schwartz 超函数）
- 佐藤超函数論は実は数値解析にも応用できる.

# 序：佐藤超函数とは…

佐藤超函数：一般化関数を複素解析関数で表現したもの

$$\delta(x) \equiv \left[ \frac{-1}{2\pi iz} \right],$$

$$\begin{aligned} \int_a^b \delta(x) \varphi(x) dx &\equiv - \oint_C \frac{-1}{2\pi iz} \varphi(z) dz \\ &= \varphi(0). \end{aligned}$$



- 複素解析関数：  
遠くの2点における値が密接に結びついている。
- 佐藤超函数の言葉を使って、  
この複素解析関数の性質を数値計算に利用したい。

# 1. 佐藤超函数論

佐藤超函数論（佐藤幹夫，1958 年）

- 複素関数論に基く一般化関数の理論
- 超函数 … ある解析関数  $F(z)$  の境界値の差

$$f(x) = [F(z)] \equiv F(x + i0) - F(x - i0).$$

- 解析関数  $F(z)$  … 超函数  $f(x)$  の定義関数

# 1. 佐藤超函数論：超函数の例

- Dirac のデルタ関数

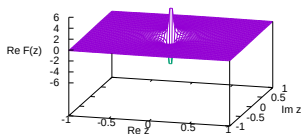
$$\delta(x) = -\frac{1}{2\pi i} \left( \frac{1}{x + i0} - \frac{1}{x - i0} \right).$$

- Heaviside のステップ関数

$$Y(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} = -\frac{1}{2\pi i} \{ \log(-(x + i0)) - \log(-(x - i0)) \}.$$

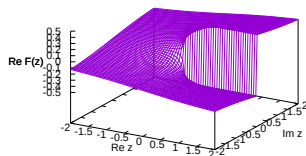
$\log z$  は主値をとる ( $x > 0$  に対し  $\log x \in \mathbb{R}$  なる分枝) .

# 1. 佐藤超函数論



$\delta(x)$  の定義関数

$$F(z) = \frac{-1}{2\pi iz}$$



$Y(x)$  の定義関数

$$F(z) = \frac{-1}{2\pi i} \log(-z)$$

超函数  $f(x) = F(x + i0) - F(x - i0)$ ,  
 $F(z)$  : 定義関数.

# 1. 佐藤超函数論：超函数の演算

超関数の計算は定義関数を使って行う。

- 線形演算（和とスカラー倍）：

超函数  $f(x) = [F(z)]$ ,  $g(x) = [G(z)]$  と定数  $a, b$  に対して,

$$\begin{aligned} af(x) + bg(x) &\equiv [aF(z) + bG(z)] \\ &= (aF + bG)(x + i0) - (aF + bG)(x - i0). \end{aligned}$$

- 微分（導関数）：超関数  $f(x) = [F(z)]$  に対して,

$$f'(x) \equiv [F'(z)] = F'(x + i0) - F'(x - i0).$$

超函数は何回でも微分可能である。

- 超函数  $f(x) = [F(z)]$  と実解析関数  $\varphi(x)$  との掛け算：

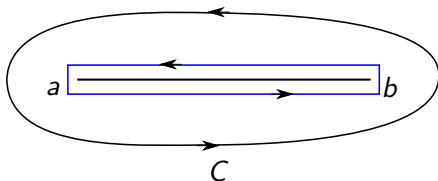
$$\varphi(x)f(x) \equiv [\varphi(z)F(z)] = (\varphi F)(x + i0) - (\varphi F)(x - i0).$$

# 1. 佐藤超函数論：超函数の積分

超函数  $f(x) = F(x + i0) - F(x - i0)$  の積分

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b F(x + i0) - F(x - i0)dx = - \oint_C F(z)dz,$$

$C$  : 区間  $[a, b]$  を正の向きに囲む閉積分路.



以下，複素積分路は被積分関数が解析的である領域を通るものとする。

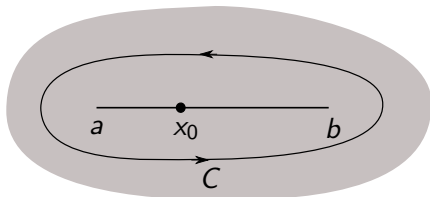


## 1. 佐藤超函数論 : Dirac のデルタ関数を含む積分

$$\delta(x - x_0) = \left[ -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z - x_0} \right],$$

$$\int_a^b \varphi(x) \delta(x - x_0) dx = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\varphi(z)}{z - x_0} dz = \varphi(x_0).$$

delta 関数の定義を再現している.



## 2. 佐藤超函数論の数値積分への応用

次の形の積分を数値計算することを考える：

$$\int_a^b \varphi(x) w(x) dx,$$

$\varphi(x) : [a, b]$  上の解析関数

$w(x) : \text{重み関数}$

$$\int_a^b \varphi(x) w(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\varphi(x) \chi_{(a,b)}(x) w(x)}_{\text{超函数とみなす}} dx,$$

$$\chi_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 1 & x \in (a, b) \\ 0 & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

## 2. 佐藤超函数論の数値積分への応用

超函数  $\chi_{(a,b)}(x)w(x)$  の標準定義関数

$$W_0(z) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\chi_{(a,b)}(x)w(x)}{x-z} dx = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{w(x)}{x-z} dx.$$

$\Downarrow$

$$\varphi(x)\chi_{(a,b)}(x)w(x) = [\varphi(z)W_0(z)]$$

考えている積分は超関数積分の定義より、  
つぎのように複素積分表示できる。

$$\int_a^b \varphi(x)w(x)dx = - \oint_C \varphi(z)W_0(z)dz,$$

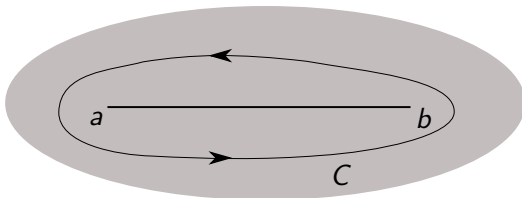
$C : [a, b]$  を正の向きに囲む閉積分路。

## 2. 佐藤超函数論の数値積分への応用

超函数を用いて、求める積分を複素積分に変換する：

$$\int_a^b \varphi(x)w(x)dx = - \oint_C \varphi(z)W_0(z)dz,$$

$$W_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{w(x)}{x-z} dx.$$

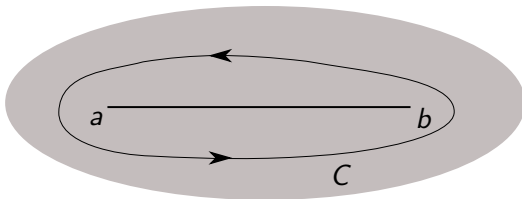


## 2. 佐藤超函数論の数値積分への応用

超函数を用いて、求める積分を複素積分に変換する：

$$\int_a^b \varphi(x)w(x)dx = - \oint_C \varphi(z)W_0(z)dz,$$

$$W_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{w(x)}{x-z} dx.$$



超函数法（数値積分）… 右辺の複素積分を台形則で近似.

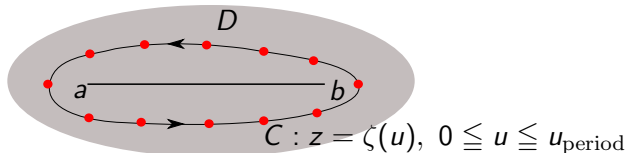
## 2. 佐藤超函数論の数値積分への応用

## 数値積分に対する超函数法

$$\int_a^b \varphi(x) w(x) dx = - \int_0^{u_{\text{period}}} \varphi(\zeta(u)) W_0(\zeta(u)) \zeta'(u) du$$

$$\simeq - h \sum_{k=0}^{N-1} \varphi(\zeta(kh)) W_0(\zeta(kh)) \zeta'(kh), \quad h = \frac{u_{\text{period}}}{N},$$

$C : z = \zeta(u), 0 \leq u \leq u_{\text{period}}$  (周期関数).



## 2. 佐藤超函数論の数値積分への応用

主な重み関数  $w(x)$  と  $W_0(z)$ .

| 区間 $(a, b)$ | 重み関数 $w(x)$                                              | $W_0(z)$                                                                                             |
|-------------|----------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $(-1, 1)$   | 1                                                        | $-\frac{1}{2\pi i} \log \frac{z+1}{z-1}$                                                             |
| $(0, 1)$    | $x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$<br>( $\alpha, \beta > 0$ ) | $-\frac{1}{2\pi i} B(\alpha, \beta) z^{-1} F(\alpha, 1; \alpha + \beta; z^{-1})$ *<br>(連分数を用いて計算できる) |

\*  $F(a, b; c; x)$  は超幾何関数 :

$$\begin{aligned}
 F(a, b; c; x) = & 1 + \frac{ab}{1!c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)}x^2 \\
 & + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{3!c(c+1)(c+2)}x^3 + \dots
 \end{aligned}$$

## 2. 佐藤超函数論の数値積分への応用

### 理論誤差評価

被積分関数  $\varphi(z)$  が  $[a, b]$  上実解析的で,  
 曲線 (積分路)  $C$  が解析的ならば,

$$\text{誤差} \leq \text{const.} \times \exp(-cN) \quad \text{指数関数的収束}$$

- 本方法が最初に提案されたのは次の文献である：  
 平山弘：周回積分変換法による数値積分法，  
 第 44 回数値解析シンポジウム講演予稿集，2015，pp.21–24.
- 緒方は上記文献に対し佐藤超函数論との関連を指摘した。  
 H. Ogata and H. Hirayama: Numerical integration method based on  
 hyperfunction theory, J. Comput. Appl. Math., 327(2018), 243–259.  
<https://doi.org/10.1016/j.cam.2017.06.018> .



## 2. 数値積分への応用：数値例

端点特異性をもつ次の積分を超函数法，DE 公式，Gauss-Jacobi 法で計算，  
誤差の標本点数  $N$  に対する振る舞いを調べた。

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{1+x^2} dx = B(\alpha, \beta) \operatorname{Re} F(\alpha, 1; \alpha + \beta; i) \quad (\alpha, \beta > 0).$$

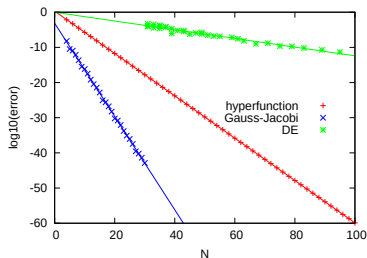
- 超函数法の複素積分路（楕円）

$$z = \zeta(u) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left( \rho + \frac{1}{\rho} \right) \cos u + \frac{i}{4} \left( \rho - \frac{1}{\rho} \right) \sin u,$$

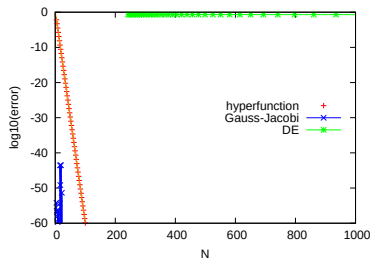
$$0 \leq u \leq u_{\text{period}} = 2\pi \quad (\rho = 2).$$

- 多倍長演算（10 進 100 桁，exflib），C++ プログラム。

## 2. 数値積分への応用：数値例（数値積分誤差）



(a)  $\alpha = \beta = 10^{-4}$



(b)  $\alpha = \beta = 10^{-50}$

端点特異性が極めて強い

誤差の減衰率

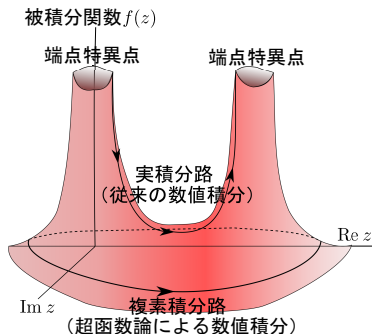
|     | 超函数法        | DE 公式       | Gauss-Jacobi 公式 |
|-----|-------------|-------------|-----------------|
| (a) | $O(0.25^N)$ | $O(0.80^N)$ | $O(0.047^N)$    |
| (b) | $O(0.25^N)$ | —           | —               |

## 2. 数値積分への応用：数値例

- 超函数法は標本点数  $N \rightarrow \infty$  で指数関数的収束する.
- 超函数法は端点特異性を強くしても収束速度はほぼ不変 (DE 公式は働かなくなる. Gauss-Jacobi 公式は不安定).

超函数法は端点特異性に強い数値積分則である.

## 2. 数値積分への応用：なぜ超函数を使うといいのか？



- 従来の数値積分法：端点特異点近くで関数値を計算する。
- 超函数法：端点特異点を避けて、関数値が穏やかに変化する複素平面上で関数値を計算する。

## 2. 数値積分への応用：なぜ超函数を使うといいのか？

- 複素解析関数は、遠く離れた 2 点における値が密接に結びついている.

- Cauchy の積分定理  $\oint_C f(z)dz = 0$ .

- 留数定理

- 超函数（実関数） = [定義関数（複素解析関数）].
- 計算の易しい複素数の世界（定義関数）で実質的な計算を行って、それを実数の世界（超函数）に戻して欲しい数値を得ている.
- 佐藤超函数：実数の世界と複素数の世界の間のインターフェイス.

\* 佐藤超函数論は Fourier 変換の計算にも応用できる  
 （動画「Fourier 変換の数値計算」 <https://youtu.be/REhQ3x1nXG4> ）.

# まとめ

- 佐藤超函数論：複素関数論に基づく一般化関数の理論.
- 佐藤超函数論による数値積分：  
求める実積分を複素積分に書き直して近似計算.
  - 端点特異性の強い積分に対して有効である.
- 佐藤超函数論の数値解析への応用.
  - 複素解析関数は、遠く離れた 2 点における値が密接に結びついている.
  - 計算の易しい複素数の世界で実質的な計算を行って、それを実数の世界に戻して欲しい数値を得ている.
  - 佐藤超函数：実数の世界と複素数の世界の間のインターフェイス.