連分数と数値解析

電気通信大学オープンキャンパス

緒方　秀教

電気通信大学　大学院情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻

2020 年 11 月

はじめに

連分数とはこんな数.

$$5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7}}}$$

- 数学的関心（とくに数論）.
- 数値計算への応用（連分数は収束が速い）.

今回の内容

- 連分数の紹介.
- 連分数の数値計算への応用（ベキ級数の解析接続）.

1. 連分数

連分数 (continued fraction)

$$C = \cfrac{a_0}{b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots}}}$$

略記法（のひとつ）

$$C = \frac{a_0|}{|b_0} + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots .$$

有限連分数　$C = \dfrac{a_0|}{|b_0} + \dfrac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \dfrac{a_n|}{|b_n},$

無限連分数　$C = \dfrac{a_0|}{|b_0} + \dfrac{a_1|}{|b_1} + \cdots .$

2. 有理数の連分数表示

（例）163/31 を連分数で表す．→ **Euclid の互除法**

$$
\begin{aligned}
163 &= 5 \times 31 + 8, \\
31 &= 3 \times 8 + 7, \\
8 &= 1 \times 7 + 1, \\
7 &= 7 \times 1 \quad \text{終わり．}
\end{aligned}
$$

（これより，163 と 31 の最大公約数は 1.）
上の計算から，

$$
\begin{aligned}
\frac{163}{31} &= 5 + \frac{8}{31} = 5 + \frac{1}{31/8} = 5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{7}{8}} \\
&= 5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{8/7}} = 5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7}}}
\end{aligned}
$$

3. 無理数の連分数表示

無限連分数

$$C = \frac{a_0|}{|b_0} + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots$$
$$= \cfrac{a_0}{b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots}}}.$$

無限連分数 C の第 n 近似分数

$$w_n = \frac{a_0|}{|b_0} + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n}.$$

無限連分数 C の値：近似分数列の極限で定義する．

$$C \equiv \lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_0|}{|b_0} + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n}.$$

（例）$\sqrt{2}$ の連分数表示を求める．

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1) \quad (\sqrt{2}\text{ の整数部分＋小数部分})$$

$$= 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)}$$

（$1+\sqrt{2}$ の整数部分＋小数部分）

$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+\sqrt{2}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + (\sqrt{2}-1)}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+\sqrt{2}}}} = \cdots$$

3. 無理数の連分数表示

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}.$$

黄金比

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}.$$

連分数を次のように「下から」計算するのは面倒である．

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}}}
&= \frac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{13}{4}}}}
= \frac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{4}{13}}} \\
&= \frac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{30}{13}}}
= \frac{1}{1+\cfrac{13}{30}}
= \frac{1}{\cfrac{43}{30}}
= \frac{30}{43}.
\end{aligned}
$$

数列の漸化式を用いた効率的な計算法がある．

連分数の近似分数の生成法

数列 $\{p_n\}, \{q_n\}$ を漸化式

$$\left.\begin{aligned} p_n &= a_n p_{n-2} + b_n p_{n-1} \\ q_n &= a_n q_{n-2} + b_n q_{n-1} \end{aligned}\right\} \quad (\, n = 1, 2, \ldots\,),$$

$$p_{-1} = 0,\ q_{-1} = 1,\ p_0 = a_0,\ q_0 = b_0.$$

で求めると,

$$\text{第 } n \text{ 近似分数} \quad w_n = \frac{p_n}{q_n} = \frac{a_0|}{|b_0} + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n}.$$

（証明）

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{a_0|}{|b_0} + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots \\
&= \frac{p_0}{q_0 + C_1} \qquad \left(C_1 = \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots \right) \\
&= \frac{p_0}{q_0 + \dfrac{a_1}{b_1 + C_2}} \qquad \left(C_2 = \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots \right) \\
&= \frac{p_0(b_1 + C_2)}{q_0(b_1 + C_2) + a_1} = \frac{\overbrace{b_1 p_0}^{p_1} + p_0 C_2}{\underbrace{a_1 q_{-1} + b_1 q_0}_{q_1} + q_0 C_2} = \frac{p_1 + p_0 C_2}{q_1 + q_0 C_2}.
\end{aligned}
$$

$C_2 = 0$ とおいて $w_1 = p_1/q_1$ を得る.

4. 連分数の計算（漸化式）

（証明（続））

$$C = \frac{p_1 + p_0 C_2}{q_1 + q_0 C_2} \quad \left(C_2 = \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots \right)$$

$$= \frac{p_1 + p_0 \dfrac{a_2}{b_2 + C_3}}{q_1 + q_0 \dfrac{a_2}{b_2 + C_3}} \quad \left(C_3 = \frac{a_3|}{|b_3} + \frac{a_4|}{|b_4} + \cdots \right)$$

$$= \frac{p_1(b_2 + C_3) + a_2 p_0}{q_1(b_2 + C_3) + a_2 q_0} = \frac{\overbrace{a_2 p_0 + b_2 p_1}^{p_2} + p_1 C_3}{\underbrace{a_2 q_0 + b_2 q_2}_{q_2} + q_1 C_3} = \frac{p_2 + p_1 C_3}{q_2 + q_1 C_3}.$$

$C_3 = 0$ とおいて $w_2 = p_2/q_2$ を得る．以下同文．

4. 連分数の計算（漸化式）：例

$$C = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}}} = \frac{30}{43}.$$

$$p_{-1} = 0, \quad q_{-1} = 1, \quad p_0 = 1, \quad q_0 = 1,$$

$$p_1 = 1 \cdot p_{-1} + 2p_0 = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2,$$

$$q_1 = 1 \cdot q_{-1} + 2q_0 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 3,$$

$$p_2 = 1 \cdot p_0 + 3p_1 = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 7,$$

$$q_2 = 1 \cdot q_0 + 3q_1 = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 10,$$

$$p_3 = 1 \cdot p_1 + 4p_2 = 1 \cdot 2 + 4 \cdot 7 = 30,$$

$$q_3 = 1 \cdot q_1 + 4q_2 = 1 \cdot 3 + 4 \cdot 10 = 43,$$

$$\therefore \quad C = \frac{p_3}{q_3} = \frac{30}{43}.$$

今まで「数」の連分数を考えてきたが,「関数」の連分数も考えられる.

関数項連分数

$$C(z) = \cfrac{a_0}{b_0 + \cfrac{a_1 z}{b_1 + \cfrac{a_2 z}{b_2 + \ddots}}}.$$

関数項連分数は他の形のものも考えられるが,
ここでは上の形のもののみ考える.

5. 関数項連分数：例

$$\arctan z = (\tan \text{ の逆関数})$$

$$= \cfrac{z}{1 + \cfrac{1^2 z^2}{3 + \cfrac{2^2 z^2}{5 + \cfrac{3^2 z^2}{7 + \ddots}}}}.$$

5. 関数項連分数：例

$$\arctan z = \text{（tan の逆関数）}$$
$$= \cfrac{z}{1+\cfrac{1^2 z^2}{3+\cfrac{2^2 z^2}{5+\cfrac{3^2 z^2}{7+\ddots}}}}.$$

$z=1$ を代入すると，$\tan(\pi/4)=1$ より $\arctan 1 = \pi/4$ であるから，

$$\pi = \cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{3+\cfrac{2^2}{5+\cfrac{3^2}{7+\ddots}}}}.$$

5. 関数項連分数：例

$$\log(1+z) = \cfrac{z}{1+\cfrac{1^2 z}{2+\cfrac{1^2 z}{3+\cfrac{2^2 z}{4+\ddots}}}},$$

$$e^z = \cfrac{1}{1-\cfrac{z}{1+\cfrac{z}{2-\cfrac{z}{3+\cfrac{z}{2-\cfrac{z}{5+\ddots}}}}}}.$$

6. ベキ級数の連分数への変換

よく知られている関数には，**ベキ級数**として表されるものが多い（解析関数）．

$$
\begin{aligned}
e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots \\
\cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots \\
\sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots \\
\log(1+z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots
\end{aligned}
$$

関数 $f(z)$ の Taylor 級数展開

$$
f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{2!} z^2 + \cdots
$$

6. ベキ級数の連分数への変換

ベキ級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ を連分数に書き直したい.

商差法

数列 $\{e_k^{(n)}\}, \{q_k^{(n)}\}$ を次の漸化式で生成する.

$$e_0^{(n)} = 0, \quad q_1^{(n)} = c_{n+1}/c_n \quad (\, n = 0, 1, 2, \ldots\,),$$

$k = 1, 2, \ldots$ に対し

$$\left.\begin{aligned} e_k^{(n)} &= q_k^{(n+1)} - q_k^{(n)} + e_{k-1}^{(n+1)} \\ q_{k+1}^{(n)} &= (e_k^{(n+1)}/e_k^{(n)})q_k^{(n+1)} \end{aligned}\right\} \quad (\, n = 0, 1, 2, \ldots\,).$$

$$\Rightarrow \quad f(z) = \frac{c_0|}{|1} - \frac{q_1^{(0)}z|}{|1} - \frac{e_1^{(0)}z|}{|1} - \frac{q_2^{(0)}z|}{|1} - \frac{e_2^{(0)}z|}{|1} - \cdots.$$

$\arctan z$, $\log(1+z)$, e^z の連分数表示は, これを用いて得られる.

7. ベキ級数の解析接続

ベキ級数で与えられる関数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ は，ある有限な範囲 $|z| < R$ でしか収束しないものがある（R : $f(z) = \sum c_n z^n$ の収束半径）.

例

- $\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$: $|z| < \infty$ で収束（収束半径 ∞）.
- $\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$: $|z| < 1$ で収束（収束半径 1）.

- ベキ級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ を連分数に変換すると，$|z| < R$ の外へ収束域を広げられることがある（解析接続）.
- 連分数は収束が速い.

7. ベキ級数の解析接続：例

$$f(z) = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \cdots \left(= \frac{\log(1+z)}{z} \right).$$

これは収束半径 1（$|z| < 1$ でしか収束しない）.
商差法を使って連分数に変換する：

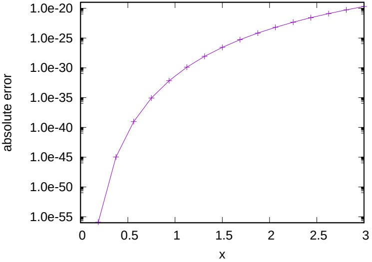
$$f(z) = \frac{a_0|}{|1} + \frac{a_1 z|}{|1} + \frac{a_2 z|}{|1} + \cdots$$

n	a_n	n	a_n
0	1.0000 . . .	7	0.28571 42857 14285 . . .
1	0.5000 . . .	8	0.22222 . . .
2	0.16666 . . .	9	0.27777 . . .
3	0.33333 . . .	10	0.22727 27272 72727 . . .
4	0.20000 . . .	11	0.27272 72727 27272 . . .
5	0.30000 . . .	12	0.23076 92307 69230 . . .
6	0.21428 57142 85714 . . .	14	0.26923 07692 30769 . . .

7. ベキ級数の解析接続：例

$$f(z)=1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{3}-\cdots\left(=\frac{\log(1+z)}{z}\right).$$

を商差法により連分数に変換して（解析接続して）$0<z=x<3$ における値を計算して，$f(z)=\log(1+z)/z$ との誤差を調べた．



- 縦軸：絶対誤差
- 横軸：$x(=z)$

$|z|<1$ の外で，連分数による解析接続が高精度で計算されている．

ゼータ関数 $\zeta(s)$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots \quad (\,\mathrm{Re}\, s > 1\,).$$

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

なぜか π が現れて，神秘的…
しかし，無限和を直接計算すると，収束は極めて遅い．

$\zeta(2) = \pi^2/6$ の計算例

N	第 N 項までの部分和	誤差
100	1.63498 39001 84892	6×10^{-3}
1000	1.64393 45666 81561	6×10^{-4}
10000	1.64483 40718 48065	6×10^{-5}
$\zeta(2)$	1.64493 40668 48226 . . .	

7. ベキ級数の解析接続：ゼータ関数の計算

ベキ級数の解析接続を用いて $\zeta(s)$ を計算する．
このために，次のベキ級数 $f_s(z)$ を導入する；

$$f_s(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} z^{n-1} = 1 - \frac{z}{2^s} + \frac{z^2}{3^s} - \frac{z^3}{4^s} + \cdots \quad (\,|z| < 1\,).$$

このとき，（「Abel の定理」により）

$$\lim_{z \to 1-0} f_s(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \cdots,$$

$$\zeta(s) = \frac{\lim_{z \to 1-0} f_s(z)}{1 - 2^{1-s}}.$$

$\lim_{z \to 1-0} f_s(z)$ が計算できれば，$\zeta(s)$ が計算できる．

7. ベキ級数の解析接続：ゼータ関数の計算

$$\zeta(s) = \frac{\displaystyle\lim_{z\to 1-0} f_s(z)}{1-2^{1-s}} \quad \text{の導出.}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 1-0} f_s(z) &= 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \cdots \\
&= \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots\right) - 2\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \cdots\right) \\
&= \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots\right) - 2\left\{\frac{1}{(2\cdot 1)^s} + \frac{1}{(2\cdot 2)^s} + \frac{1}{(2\cdot 3)^s} + \cdots\right\} \\
&= \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots\right) - 2\cdot\frac{1}{2^s}\left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots\right) \\
&= (1-2^{1-s})\zeta(s),
\end{aligned}$$

$f_s(z) = 1 - (1/2^s)z^2 + (1/3^s)z^3 - \cdots$ は収束半径 1 なので，直接無限和 $\displaystyle\lim_{z\to 1-0} f_s(z) = 1 - 1/2^s + 1/3^3 - \cdots$ を計算することはできない．
そこで，連分数による解析接続で $\displaystyle\lim_{z\to 1-0} f_s(z)$ を計算する．

$f_s(z)$ の連分数による解析接続により $\zeta(s)$ を計算した.
（N：計算に用いた $f_s(z)$ の連分数展開の項数）

$\zeta(2)$ の計算結果

N	計算値	誤差
	$\zeta(2) = 1.64493\,40668\,48226\,43647\,24151\,66646\ldots$	
5	1.64489 69002 93712 58209 31254 90598	2×10^{-5}
10	1.64493 40726 89542 83663 16613 13592	4×10^{-9}
20	1.64493 40668 48226 56075 12003 15320	8×10^{-17}
30	1.64493 40668 48226 43647 24178 71472	2×10^{-24}
40	1.64493 40668 48226 43647 24151 66646	4×10^{-32}

$\zeta(3), \zeta(4)$ の計算結果

N	計算値	誤差
	$\zeta(3) = 1.20205\ 69031\ 59594\ 28539\ 97381\ 61511\ldots$	
5	1.20204 63030 72491 70127 17003 53138	9×10^{-6}
10	1.20205 69046 12434 17903 19279 09247	1×10^{-9}
20	1.20205 69031 59594 31459 67766 32634	2×10^{-17}
30	1.20205 69031 59594 28539 97387 82485	5×10^{-25}
40	1.20205 69031 59594 28539 97381 61511	1×10^{-32}
	$\zeta(4) = \pi^4/90 = 1.08232\ 32337\ 11138\ 19151\ 60036\ 96541\ldots$	
5	1.08232 02775 69940 89008 44436 34696	3×10^{-6}
10	1.08232 32340 53672 81736 77739 03745	3×10^{-10}
20	1.08232 32337 11138 19775 52807 95555	6×10^{-18}
30	1.08232 32337 11138 19151 60038 23995	1×10^{-25}
40	1.08232 32337 11138 19151 60036 96541	2×10^{-33}

$\zeta(2), \zeta(3), \zeta(4)$ が高精度で計算できた:-)

まとめ

- 連分数の定義，計算方法．

$$C = \cfrac{a_0}{b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cdots}}}.$$

- 関数項連分数，数値計算への応用．

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \cfrac{a_0}{1 + \cfrac{a_1 z}{1 + \cfrac{a_2 z}{1 + \cdots}}}.$$

ベキ級数を連分数に変換→収束域を広げる（解析接続）．