連分数はなぜ収束するか？(1)

緒方　秀教

電気通信大学　大学院情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻

2020 年 12 月 28 日（月）

今回の内容

- 連分数

$$\cfrac{a_0}{b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots}}}.$$

- 連分数は収束が速いものが多い．
- しかし，連分数は何故に収束が速いか，「見た目」からはわかりにくい．
- 連分数が収束するカラクリを（今回は特別な場合で）解明する．

ネタ本

- P. Henrici: Applied and Computational Complex Analysis, Vol.2, John Wiley & Sons, New York, 1977.

連分数

連分数 (continued fraction)

$$\cfrac{a_0}{b_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\ddots}}}.$$

スペースを省略した表記

$$\frac{a_0|}{|b_0}+\frac{a_1|}{|b_1}+\frac{a_2|}{|b_2}+\cdots.$$

連分数の例

いろんな数が連分数で表される.

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}, \quad 黄金比 \quad \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}},$$

$$\pi = \cfrac{4}{1 + \cfrac{1^2}{3 + \cfrac{2^2}{5 + \cfrac{3^2}{7 + \ddots}}}}, \quad \mathrm{e} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{7 + \ddots}}}}}}}}.$$

連分数の収束

連分数

$$\frac{a_0|}{|b_0} + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots = \cfrac{a_0}{b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots}}}$$

連分数の収束・値

第 n 近似分数 $\quad w_n = \frac{a_0|}{|b_0} + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n}.$

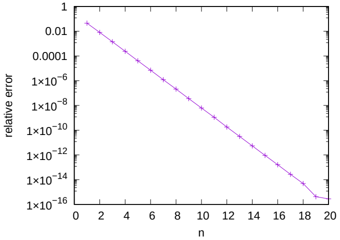
$\lim_{n\to\infty} w_n$ が収束するとき，この極限値を上の連分数の値と定める．

連分数の収束

連分数は（$\lim_{n\to\infty} w_n$ の）収束が速いものが多い．

（例）π の連分数の場合．

n	w_n	相対誤差
6	3.14161 49068 32298	7×10^{-6}
8	3.14159 33118 79928	2×10^{-7}
10	3.14159 26730 30335	6×10^{-9}
12	3.14159 26541 63366	2×10^{-10}
14	3.14159 26536 06706	5×10^{-12}
16	3.14159 26535 90292	2×10^{-13}
18	3.14159 26535 89808	5×10^{-15}
20	3.14159 26535 89794	1×10^{-16}
π	3.14159 26535 89793 . . .	



指数関数的収束

$*$ 連分数の近似分数 w_n の計算法は，動画「連分数と数値解析」を参照．

では，連分数はなぜ速く収束するのだろう？

連分数の収束：なぜ収束するのか？

次の特別な場合について，連分数が収束するカラクリを考察する．

$$w = \cfrac{a}{1+\cfrac{a}{1+\cfrac{a}{1+\ddots}}}.$$

ただし，a は次を満たす複素数とする：

$$a \notin \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, a \leq -\frac{1}{4} \right\}.$$

解明のカギ：一次分数変換.

一次分数変換

$$T_a(u) = \frac{a}{1+u}.$$

上の写像 $u \mapsto T(u)$ を用いると，第 n 近似分数は次のように表される．

$$w_n = \underbrace{\frac{a}{\lfloor 1} + \frac{a}{\lfloor 1} + \cdots + \frac{a}{\lfloor 1}}_{n+1\ \text{個}} = \underbrace{T_a \circ T_a \circ \cdots T_a}_{n+1\ \text{個}}(0).$$

$T_a(u)$ は一次分数変換のひとつである．

一次分数変換 (Möbius transform)

次の形の複素平面上の変換．

$$T(u) = \frac{au+b}{cu+d} \quad (\ a, b, c, d \text{ const.},\ ad - bc \neq 0\ ).$$

一次分数変換

一次分数変換の重要な性質

- （円円対応）一次分数変換は円（または直線）を円（または直線）に写す.
- 2×2 正則行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ に一次分数変換

$$T_A(u) = \frac{a_{11}u + a_{12}}{a_{21}u + a_{22}}$$

を対応させると,

$$T_{AB} = T_A \circ T_B \quad (\, A, B \ 2 \times 2 \text{ 正則行列 }).$$

一次分数変換

s_1, s_2 : $T_a(u) = \dfrac{a}{1+u}$ の不動点，i.e., 次の方程式の解.

$$s = T_a(s) = \frac{a}{1+s}, \quad \text{i.e.} \quad s^2 + s - a = 0.$$

$|s_1| < |s_2|$ となるように s_1, s_2 を選ぶ,

$$\theta \equiv \left|\frac{s_1}{s_2}\right|.$$

連分数 $w = \dfrac{a|}{|1} + \dfrac{a|}{|1} + \cdots$ は $T_a(u)$ の不動点（だから，$w = s_1$ or s_2）.

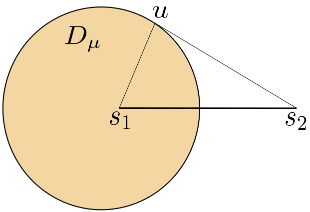
仮定 $a \notin \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1/4 \,\}$ より,

$$s_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}, \quad s_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + a}.$$

$*$ $\sqrt{\cdot}$ は主値をとる ($\sqrt{x} > 0$ if $x \in \mathbb{R}$ & $x > 0$).

Apollonius の円

$$D_\mu = \left\{ u \in \mathbb{C} \,\middle|\, \left| \frac{u - s_1}{u - s_2} \right| \leq \mu \right\} \quad (\, 0 < \mu < 1\,).$$

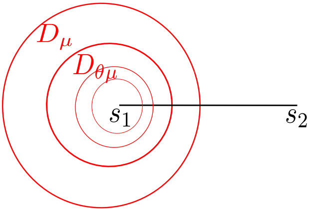


$$\overline{s_1 u} : \overline{s_2 u} = \mu : 1.$$

一次分数変換 $T_a(u)$ と Apollonius の円

一次分数変換 $T_a(u) = \dfrac{a}{1+u}$ は円 D_μ を縮める．

$$T_a(D_\mu) = D_{\theta\mu}, \quad \theta = \left|\frac{s_1}{s_2}\right| < 1.$$



D_μ にどんどん T_a を作用させると，
$T_a \circ \cdots \circ T_a(D_\mu) = D_{\theta^n\mu}$ は 1 点 s_1 に向かって縮んでゆく．

一次分数変換 $T_a(u)$ と Apollonius の円

$T_a(D_\mu) = D_{\theta\mu}$ の証明

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{V}^{-1}\mathrm{R}\mathrm{V}, \quad \mathrm{R} = \begin{pmatrix} -s_1 & 0 \\ 0 & -s_2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{V} = \begin{pmatrix} 1 & -s_1 \\ 1 & -s_2 \end{pmatrix}.$$

$$\Downarrow$$

$$T_a(u) = T_{\mathrm{V}}^{-1} \circ T_{\mathrm{R}} \circ T_{\mathrm{V}}(u).$$

1. $T_{\mathrm{V}}(u) = \dfrac{u - s_1}{u - s_2}$: 円 $D_\mu = \left\{ \left| \dfrac{u - s_1}{u - s_2} \right| \leq \mu \right\}$ を円 $\{\, |u| \leq \mu \,\}$ に写す.
2. $T_{\mathrm{R}}(u) = \dfrac{s_1}{s_2} u$: 円 $\{\, |u| \leq \mu \,\}$ を円 $\{\, |u| \leq \theta\mu \,\}$ に写す.
3. T_{V}^{-1} : 円 $\{\, |u| < \theta\mu \,\}$ を円 $D_{\theta\mu}$ に写す.

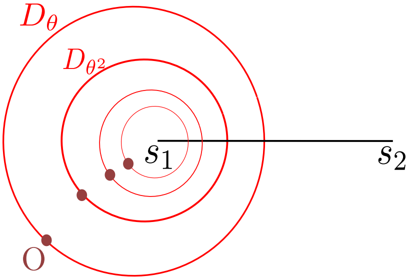
ゆえに, $T_a(D_\mu) = D_{\theta\mu}$ が示された. ■

連分数の収束

$$0 \in \partial D_\theta \text{ に注意} \left(\because \quad \left| \frac{0 - s_1}{0 - s_2} \right| = \left| \frac{s_1}{s_2} \right| = \theta \right).$$

$$w_n = \underbrace{T_a \circ T_a \circ \cdots \circ T_a}_{n+1\text{ 個}}(0) \in \partial D_{\theta^{n+2}} \to \{\, s_1 \,\} \quad (\, n \to \infty \,).$$

$$\therefore \quad s_1 = \lim_{n\to\infty} w_n = w.$$



連分数の収束

$0 \in \partial D_\theta$ に注意 $\left(\because \quad \left| \frac{0 - s_1}{0 - s_2} \right| = \left| \frac{s_1}{s_2} \right| = \theta \right)$.

$$w_n = \underbrace{T_a \circ T_a \circ \cdots \circ T_a}_{n+1\text{ 個}}(0) \in \partial D_{\theta^{n+2}} \to \{\, s_1 \,\} \quad (\, n \to \infty \,).$$

$$\therefore \quad s_1 = \lim_{n\to\infty} w_n = w.$$

D_μの半径 $= \dfrac{\mu}{1-\mu^2} |s_1 - s_2|$ であるから,

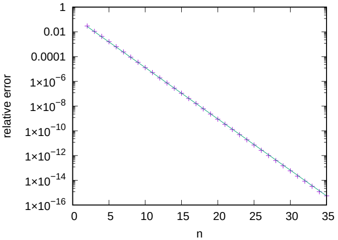
$$|w_n - s_1| \lesssim 2\theta^{n+2} |s_1 - s_2| \quad \text{指数関数的収束},$$

誤差 $\quad w_n - s_1 = \mathrm{O}(\theta^n), \quad \theta = \left| \dfrac{s_1}{s_2} \right|.$

数値例

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \cdots$$ の場合．

n	w_n	相対誤差
4	1.62500 00000 00000	4×10^{-3}
8	1.61818 18181 81818	9×10^{-5}
14	1.61803 44478 21682	3×10^{-7}
18	1.61803 39985 21804	6×10^{-9}
22	1.61803 39889 57902	1×10^{-10}
26	1.61803 39887 54322	3×10^{-12}
30	1.61803 39887 49989	6×10^{-14}
34	1.61803 39887 49897	1×10^{-15}
真値	1.61803 39887 49895 ...	



$$\text{誤差} = \begin{cases} \mathrm{O}(0.385^n) & \text{（実験）} \\ \mathrm{O}(0.382^n) & \text{（理論）}. \end{cases}$$

理論解析結果は数値実験結果とよく符合する．

まとめ

- 次の形の連分数について収束の様子を理論的に調べた.

$$w = \frac{a|}{|1} + \frac{a|}{|1} + \cdots .$$

- 一次分数変換 $T_a(u) = \dfrac{a}{1+u}$ が収束解析のカギを握る.
    - $w = T_a \circ T_a \circ \cdots (0)$.
    - 一次分数変換 $T_a(u)$ は Apollonius の円を縮める作用を持つ.
    - 理論誤差評価：$T_a(u)$ の不動点を s_1, s_2 ($|s_1| < |s_2|$), $\theta = |s_1/s_2|$ として,

$$\text{誤差} = \mathrm{O}(\theta^n).$$

- 理論解析結果は数値実験結果とよく符合する.

次回は一般的な形の連分数について収束解析をします.