

# 楕円関数論 (4)

## 楕円関数の一般的定義・性質

緒方 秀教

電気通信大学 大学院情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻

2020年12月4日 (金)

- Jacobi の楕円関数  $\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$  の定義 ( $|u| \leq K$ ).

$$x = \operatorname{sn} u = \operatorname{sn}(u; k) \quad \Leftrightarrow \quad u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$\operatorname{cn} u = \operatorname{cn}(u; k) = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 u},$$

$$\operatorname{dn} u = \operatorname{dn}(u; k) = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u},$$

$k$  ( $0 < k < 1$ ) : 母数,

$$K = K(k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} : \text{第 1 種完全楕円積分.}$$

- 加法定理.
- 全区間  $-\infty < u < \infty$  へ定義域を拡張.

- 複素関数へ拡張.  $\operatorname{sn}, \operatorname{cn}, \operatorname{dn}$  は全複素平面  $\mathbb{C}$  上の有理型関数である.
- $\operatorname{sn}, \operatorname{cn}, \operatorname{dn}$  は二重周期関数である.

今回は楕円関数の一般的定義を述べ, その性質を調べます.

\* 今回は複素関数論の知識 (留数定理あたりまで) がかなり必要になります.

複素関数論の教科書

- 大学の授業で用いた教科書.
- 林一道: 初等関数論 (裳華房, 1992 年).

# 楕円関数の定義

## 楕円関数の定義

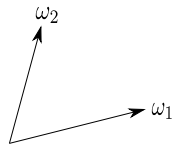
全複素平面  $\mathbb{C}$  で有理型である二重周期関数を楕円関数とよぶ。

つまり、次を満たす複素関数  $f(z)$  を楕円関数とよぶ。

- $f(z)$  は全複素平面  $\mathbb{C}$  で有理型関数である (極を除いて正則である)。
- 0 でない複素数  $\omega_1, \omega_2$  で  $\text{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$  なるものが存在して、

$$f(z + m\omega_1 + n\omega_2) = f(z) \quad (\forall m, n \in \mathbb{Z}).$$

$\omega_1, \omega_2$  : 楕円関数  $f(z)$  の基本周期。



$\text{sn}, \text{cn}, \text{dn}$  は楕円関数である。

## 定理 1

- $f(z)$  が楕円関数なら、その導関数  $f'(z)$  も  $f(z)$  と同じ基本周期をもつ楕円関数である。
- $f(z), g(z)$  が同じ基本周期をもつ楕円関数であるならば、 $f(z) \pm g(z), f(z)g(z), f(z)/g(z)$  も  $f(z), g(z)$  と同じ基本周期をもつ楕円関数である。

# 楕円関数の一般的性質

## 定理 2

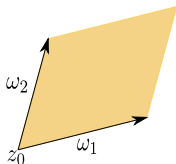
整関数である楕円関数は定数関数に限る。

(証明)  $f(z)$  を整関数である楕円関数とすれば、二重周期性より  $f(z)$  は  $\mathbb{C}$  全体で有界であるから、複素関数論の Liouville の定理により  $f(z)$  は定数関数となる。 ■

周期平行四辺形：次の形の集合

$$\{ z_0 + u\omega_1 + v\omega_2 \mid 0 \leq u, v < 1 \}$$

( $z_0 \in \mathbb{C} : \text{const.}$ ).



## 系

ひとつの周期平行四辺形で正則である楕円関数は定数関数に限る。

# 楕円関数の一般的性質

## 定理 3

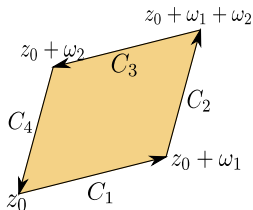
ひとつの周期平行四辺形内の楕円関数の零点の個数と極の個数は等しい  
(零点・極の個数は位数の分重複して数える)。

(証明)  $f(z)$  を楕円関数とする。偏角の原理より、

$$(\text{零点の数}) - (\text{極の数}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1 + \dots + C_4} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

$f'(z)/f(z)$  の二重周期性より

$$\int_{C_3} = -\int_{C_1}, \quad \int_{C_2} = -\int_{C_4},$$
$$\therefore \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1 + \dots + C_4} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0.$$



楕円関数  $f(z)$  の**位数**  $\equiv f(z)$  の周期平行四辺形内の極の数  
 $= f(z)$  の周期平行四辺形内の零点の数.

# 楕円関数の一般的性質

## 定理 4

楕円関数のひとつの周期平行四辺形内にあるすべての極の留数の和は 0 である。

(証明)  $f(z)$  を楕円関数,  $C$  をひとつの周期平行四辺形の周 (反時計回り) とする. 必要なら少しずらして,  $C$  上には  $f(z)$  の極はないと仮定してよい (これは極が有限個だから可能). 留数定理より,

$$(\text{留数の和}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz.$$

$f(z)$  の二重周期性より, 定理 3 の証明と同様にして, 右辺の積分 = 0.

## 系

位数 1 の楕円関数は存在しない。

(証明) 位数 1 の楕円関数が存在すると仮定すると, その極の留数が周期平行四辺形内の極の留数の和 ( $\neq 0$ ) となり, 留数の和 = 0 に矛盾する。



# 楕円関数の一般的性質

$f(z)$  : 楕円関数 (基本周期  $\omega_1, \omega_2$ )

$f(z)$  の周期全体の集合  $\Lambda = \Lambda(f) \equiv \{ m\omega_1 + n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$ .

$\Lambda$  を法として合同  $a \equiv b \pmod{\Lambda} \stackrel{\text{def}}{\iff} a - b \in \Lambda$ .

## 定理 5

$f(z)$  : 楕円関数 (位数  $n$ ),  $P$  :  $f(z)$  のひとつの周期平行四辺形,

$a_1, \dots, a_n$  :  $f(z)$  の  $P$  内の零点,

$b_1, \dots, b_n$  :  $f(z)$  の  $P$  内の極

(零点・極は位数の分重複して記す).

このとき,

$$a_1 + \dots + a_n \equiv b_1 + \dots + b_n \pmod{\Lambda}.$$

# 楕円関数の一般的性質

(証明) まず,  $f(z)$  が点  $a$  に位数  $r$  の零点を持つとき,  $zf'(z)/f(z)$  の点  $a$  における留数は  $ra$  であることを示す.  $f(z)$  は点  $a$  近傍で

$$\begin{aligned} f(z) &= c_0(z-a)^r + c_1(z-a)^{r+1} + c_2(z-a)^{r+2} + \cdots \quad (c_0 \neq 0) \\ &= c_0(z-a)^r g(z) \quad (g(z) : \text{点 } a \text{ 近傍で正則, } g(a) \neq 0) \end{aligned}$$

と Taylor 展開される. すると, 点  $a$  近傍で

$$\begin{aligned} f'(z) &= rc_0(z-a)^{r-1}g(z) + c_0(z-a)^r g'(z), \\ \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{r}{z-a} + h(z) \quad (h(z) : \text{点 } a \text{ 近傍で正則}), \\ z \frac{f'(z)}{f(z)} &= ((z-a) + a) \left\{ \frac{r}{z-a} + h(z) \right\} \\ &= \frac{ra}{z-a} + (\text{点 } a \text{ 近傍で正則な関数}) \end{aligned}$$

となるので,  $zf'(z)/f(z)$  の点  $a$  における留数は  $ra$  である.

同様に,  $f(z)$  が点  $b$  に位数  $s$  の極を持つとき,  $zf'(z)/f(z)$  の点  $b$  における留数は  $-sb$  であることがわかる.

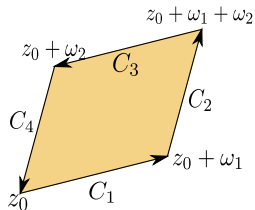
# 楕円関数の一般的性質

必要なら  $P$  を少しずらして、周期平行四辺形  $P$  の周上に  $f(z)$  の零点・極は存在しないと仮定してよい。留数定理と前頁の議論により、

$$(a_1 + \cdots + a_n) - (b_1 + \cdots + b_n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1 + \cdots + C_4} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

$f'(z)/f(z)$  の二重周期性より、

$$\begin{aligned} \int_{C_2} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= - \int_{C_4} (z + \omega_1) \frac{f'(z)}{f(z)} dz \\ &= - \int_{C_4} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \omega_1 \int_{C_4} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \\ &= - \int_{C_4} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \omega_1 \left[ \log f(z) \right]_{C_4} \\ &\quad (f(z_0 + \omega_2) = f(z_0) \text{ より}) \\ &= - \int_{C_4} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz + 2\pi i \omega_1 \times (\text{整数}), \end{aligned}$$



$C_1 + \cdots + C_4$  は  $P$  の周をなす。

# 楕円関数の一般的性質

同様にして、次も得る.

$$\int_{C_3} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = - \int_{C_1} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz + 2\pi i \omega_2 \times (\text{整数}).$$

以上により,

$$\int_{C_1 + \dots + C_4} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i (\omega_1 \times (\text{整数}) + \omega_2 \times (\text{整数})).$$

$$\therefore (a_1 + \dots + a_n) - (b_1 + \dots + b_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1 + \dots + C_4} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz \in \Lambda.$$

■

# 楕円関数の一般的性質

同様にして，次も得る．

$$\int_{C_3} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = - \int_{C_1} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz + 2\pi i \omega_2 \times (\text{整数}).$$

以上により，

$$\int_{C_1 + \dots + C_4} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i (\omega_1 \times (\text{整数}) + \omega_2 \times (\text{整数})).$$

$$\therefore (a_1 + \dots + a_n) - (b_1 + \dots + b_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1 + \dots + C_4} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz \in \Lambda.$$

■

以上で，楕円関数の一般論は終わりです．

次回は，テータ関数を勉強します．これを勉強すれば，いよいよ Jacobi の楕円関数の数値計算ができるようになります．