楕円関数論 (5)
テータ関数（導入）

緒方　秀教

電気通信大学　大学院情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻

2020 年 12 月 7 日（月）

復習

- Jacobi の楕円関数の定義，複素関数への拡張．
- Jacobi の楕円関数は二重周期性をもつ有理型関数である．

	基本周期	零点 （m,n：整数）	極 （m,n：整数）
sn	$4K, 2iK'$	$2mK+2niK'$	$2mK+(2n+1)iK'$
cn	$4K, 2K+2iK'$	$(2m+1)K+2inK'$	$2mK+(2n+1)iK'$
dn	$2K, 4iK'$	$(2m+1)K+(2n+1)iK'$	$2mK+(2n+1)iK'$

零点・極はすべて 1 位である．

楕円関数の一般的定義・性質

- 二重周期性をもつ有理型関数を楕円関数とよぶ．
- 全複素平面で正則な楕円関数は定数関数に限る．

今日やること

- テータ関数を導入する.
- テータ関数とは何か？

  sn：零点 $2mK+2n\mathrm{i}K'$，極 $2mK+(2n+1)\mathrm{i}K'$（m,n は整数）.

$$\mathrm{sn}\,u = \frac{2mK+2n\mathrm{i}K' \text{ に零点を持つ整関数}}{2mK+(2n+1)\mathrm{i}K' \text{ に零点を持つ整関数}} = \frac{\text{テータ関数}}{\text{テータ関数}}.$$

$*$ 整関数：全複素平面 $\mathbb{C}$ で解析的な関数.

予備的考察

整関数は無限積の「因数分解」で表される．

$\sin z$：$n\pi$（n は整数）に 1 位の零点を持つ整関数

$\sin z$ の「因数分解」(無限積表示)．

$$\sin z = z\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{z^2}{(n\pi)^2}\right].$$

∗ 余談 (Euler)

$$\begin{aligned}\sin z &= z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\\ &= z\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots\\ &= z-\frac{1}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)z^3+\cdots\end{aligned}$$

z^3 の係数比較により $\quad 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$

予備的考察

sn 関数

- 零点（1 位）$2mK + 2n\mathrm{i}K'$（m, n は整数）.
- 極（1 位）$2mK + (2n+1)\mathrm{i}K'$（m, n は整数）.

sn 関数を次の形で与えたい.

$$\mathrm{sn}\, u = \frac{2mK + 2n\mathrm{i}K' \text{ に零点を持つ整関数}}{2mK + (2n+1)\mathrm{i}K' \text{ に零点を持つ整関数}} =: \frac{f(u)}{g(u)}.$$

整関数 $f(u)$, $g(u)$ を「因数分解」（無限積表示）の形で与える.

予備的考察

$*$ 以下の考察は，戸田盛和：楕円関数入門，日本評論社（2001 年）より．

$f(u)$ は次の形か？

$$f(u) = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \sin\left[\frac{\pi(u-2inK')}{2K}\right] = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{2K}(u-2inK') \prod_{m=1}^{\infty}\left[1-\left(\frac{u-2inK'}{2mK}\right)^2\right] \ ?$$

これは収束しない．

無限積が収束するように変形する．

n について正負の対の積をとってみる．

$$f(u) = \sin\frac{\pi u}{2K} \prod_{n=1}^{\infty} \sin\left[\frac{\pi(u-2inK')}{2K}\right] \sin\left[\frac{\pi(u+2inK')}{2K}\right]$$

予備的考察

$$\sin\left[\frac{\pi(u-2inK')}{2K}\right]\sin\left[\frac{\pi(u+2inK')}{2K}\right]=\frac{1}{2}\left[\cosh\left(\frac{2n\pi K'}{K}\right)-\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[q^{2n}+q^{-2n}-2\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)\right]\quad\left(q=\mathrm{e}^{-\pi K'/K}\right)$$

$$=\frac{q^{-2n}}{4}\left[1-2q^{2n}\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{4n}\right],$$

$f(u)$ として次の形のものを取ることにする．

$$f(u)=\sin\left(\frac{\pi u}{2K}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-2q^{2n}\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{4n}\right]\quad\left(q=\mathrm{e}^{-\pi K'/K}\right).$$

$q<1$ よりこの無限積は収束する．

（$\mathbb{C}$ で広義一様収束して整関数を与える.）

予備的考察

$$f(u) = \sin\left(\frac{\pi u}{2K}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left[1 - 2q^{2n}\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right) + q^{4n}\right] \quad \left(q = \mathrm{e}^{-\pi K'/K}\right).$$

同様の考察により，分母 $g(u)$ は次の形で得られる．

$$g(u) = \prod_{n=1}^{\infty}\left[1 - 2q^{2n-1}\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right) + q^{4n-2}\right].$$

$*$ 右辺は $\mathbb{C}$ で広義一様収束して整関数を与える.)

$$\mathrm{sn}(u; k) = C\frac{f(u)}{g(u)} \quad (\,C\ :\ \text{const.}\,)$$

となってくれたら嬉しい．

予備的考察

$$\mathrm{sn}(u;k) = C\frac{f(u)}{g(u)} \quad (\ C\ :\ \mathrm{const.}\ ) \quad \text{を示すには？}$$

次を示せばよい

- $f(u)/g(u)$ と $\mathrm{sn}(u;k)$ は同じ零点・極を（位数を含めて）持つ.
- $f(u)/g(u)$ と $\mathrm{sn}(u;k)$ は同じ基本周期 $4K, 2iK'$ を持つ楕円関数である.

（理由）関数 $F(u) = \dfrac{\mathrm{sn}(u;k)}{f(u)/g(u)}$ は整関数である楕円関数となるが，
整関数である楕円関数は定数関数に限るから，$F(u) \equiv \mathrm{const.}$
（動画「楕円関数論（４）」参照），

予備的考察

$f(u+2K), f(u+2\mathrm{i}K'), g(u+2K), g(u+2\mathrm{i}K')$ を調べる．

$$f(u) = \sin\left(\frac{\pi u}{2K}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left[1 - 2q^{2n}\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right) + q^{4n}\right].$$

$f(u+2K) = -f(u)$ はすぐわかる． $f(u+2\mathrm{i}K')$ を調べるには,

$$f(u) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi u/2K}\prod_{n=1}^{\infty}(1 - q^{2n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi u/K})(1 - q^{2n-2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi u/K})$$

を用いると計算しやすい． $q = \mathrm{e}^{-\pi K'/K}$ に注意して,

$$\begin{aligned} f(u+2\mathrm{i}K') &= \frac{1}{2\mathrm{i}}q\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi u/2K}\prod_{n=1}^{\infty}(1 - q^{2n+2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi u/K})(1 - q^{2n-4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi u/K}) \\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}}q\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi u/2K}\frac{1 - q^{-2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi u/K}}{1 - q^{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi u/K}}\prod_{n=1}^{\infty}(1 - q^{2n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi u/K})(1 - q^{2n-2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi u/K}) \\ &= -q^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi u/K}f(u). \end{aligned}$$

予備的考察

$$\therefore\quad f(u+2K) = -f(u),\quad f(u+2\mathrm{i}K') = -q^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi u/K} f_s(u),$$

同様にして $g(u+2K) = g(u),\quad g(u+2\mathrm{i}K') = -q^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi u/K} g(u).$

$$\Downarrow$$

$$\frac{f(u+2K)}{g(u+2K)} = -\frac{f(u)}{g(u)},\quad \frac{f(u+2\mathrm{i}K')}{g(u+2\mathrm{i}K')} = \frac{f(u)}{g(u)}.$$

$f(u)/g(u)$ は基本周期 $4K, 2\mathrm{i}K'$ の楕円関数である．
ゆえに，前に述べたことから

$$\mathrm{sn}(u;k) = C\frac{f(u)}{g(u)}\quad (\ C\ :\ \mathrm{const.}\ ).$$

テータ関数の定義

（定義）テータ関数

v：複素変数，τ：複素パラメータ ($\operatorname{Im}\tau > 0$). $q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\tau}$.

$$\vartheta_1(v|\tau) \equiv 2q^{1/4}\sin\pi v\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-2q^{2n}\cos 2\pi v+q^{4n}),$$

$$\vartheta_2(v|\tau) \equiv 2q^{1/4}\cos\pi v\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+2q^{2n}\cos 2\pi v+q^{4n}),$$

$$\vartheta_3(v|\tau) \equiv \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+2q^{2n-1}\cos 2\pi v+q^{4n-2}),$$

$$\vartheta_0(v|\tau) \equiv \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-2q^{2n-1}\cos 2\pi v+q^{4n-2}).$$

$*$ $\vartheta_0(v|\tau)$ は $\vartheta_4(v|\tau)$ と記されることもある．

$*$ 係数 $\prod(1-q^{2n})$ などをつけた理由は，次回の動画でわかります．

テータ関数の定義

$\vartheta_k(v|\tau)$ ($k = 0 \sim 3$) は整関数である．

$\because$ $\operatorname{Im}\tau > 0$ より $|q| = \mathrm{e}^{-\pi \operatorname{Im}\tau} < 1$ であるから，無限積は $\mathbb{C}$ で広義一様収束して整関数を与える． ■

テータ関数の零点

$\vartheta_k(v|\tau)$ ($k = 0 \sim 3$) は下記の点に 1 位の零点を持つ．

	零点（m, n は整数）
$\vartheta_1(v\|\tau)$	$m + n\tau$
$\vartheta_2(v\|\tau)$	$(m + 1/2) + n\tau$
$\vartheta_3(v\|\tau)$	$(m + 1/2) + (n + 1/2)\tau$
$\vartheta_0(v\|\tau)$	$m + (n + 1/2)\tau$

テータ関数の定義

テータ関数の零点を調べるには，$\vartheta_k(v|\tau)$ ($k = 0 \sim 3$) を次のように書き直すとわかりやすい．

$\operatorname{Im}\tau > 0$, $q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\tau}$.

$$\vartheta_1(v|\tau) = -\mathrm{i}q^{1/4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi v}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}v})(1-q^{2n-2}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}v}),$$

$$\vartheta_2(v|\tau) = q^{1/4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi v}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}v})(1+q^{2n-2}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}v}),$$

$$\vartheta_3(v|\tau) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}v})(1+q^{2n-1}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}v}),$$

$$\vartheta_0(v|\tau) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n-1}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}v})(1-q^{2n-1}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}v}).$$

テータ関数の擬周期性

$\operatorname{Im}\tau > 0,\ q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\tau}$.

$$
\begin{aligned}
\vartheta_1(v+1|\tau) &= -\vartheta_1(v|\tau), & \vartheta_1(v+\tau|\tau) &= -q^{-1}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}v}\vartheta_1(v|\tau),\\
\vartheta_2(v+1|\tau) &= -\vartheta_2(v|\tau), & \vartheta_2(v+\tau|\tau) &= q^{-1}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}v}\vartheta_2(v|\tau),\\
\vartheta_3(v+1|\tau) &= \vartheta_3(v|\tau), & \vartheta_3(v+\tau|\tau) &= q^{-1}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}v}\vartheta_3(v|\tau),\\
\vartheta_0(v+1|\tau) &= \vartheta_0(v|\tau), & \vartheta_0(v+\tau|\tau) &= -q^{-1}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}v}\vartheta_0(v|\tau).
\end{aligned}
$$

Jacobi 楕円関数のテータ関数による表現

$f(u) = \text{const.} \times \vartheta_1(\pi u/2K|\tau)$, $g(u) = \text{const.} \times \vartheta_0(\pi u/2K|\tau)$
($\tau = \mathrm{i}K'/K$) より，

$$\mathrm{sn}(u;k) = C_s \frac{\vartheta_1(u/2K|\tau)}{\vartheta_0(u/2K|\tau)} \quad (\ C_s\ :\ \text{const.}\ ).$$

同様の考察により，

$$\mathrm{cn}(u;k) = C_c \frac{\vartheta_2(u/2K|\tau)}{\vartheta_0(u/2K|\tau)}, \quad \mathrm{dn}(u;k) = C_d \frac{\vartheta_3(u/2K|\tau)}{\vartheta_0(u/2K|\tau)}$$
$$(\ C_c, C_d\ :\ \text{const.}\ ).$$

cn, dn については， $u = 0$ とおくことにより， $cn0 = \mathrm{dn}\,0 = 1$ から係数 C_c, C_d がすぐ求まる．

$$\mathrm{cn}(u;k) = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_2} \frac{\vartheta_2(u/2K|\tau)}{\vartheta_0(u/2K|\tau)}, \quad \mathrm{dn}(u;k) = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_3} \frac{\vartheta_3(u/2K|\tau)}{\vartheta_0(u/2K|\tau)},$$
$$\vartheta_k = \vartheta_k(0|\tau) \quad (\ k = 2, 3, 0\ ), \quad \tau = \mathrm{i}\frac{K'}{K}.$$

Jacobi 楕円関数のテータ関数による表現

sn については，$u = K$ とおくことにより，$\operatorname{sn} K = 1$ から係数 C_s が次のように求まる．

$$C_s = \frac{\vartheta_0(1/2|\tau)}{\vartheta_1(1/2|\tau)}.$$

$$\vartheta_0(1/2|\tau) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1})^2 = \vartheta_3(0|\tau) = \vartheta_3,$$

$$\vartheta_1(1/2|\tau) = 2q^{1/4}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n})(1+q^{2n-2}) = \vartheta_2(0|\tau) = \vartheta_2.$$

$$\therefore \quad C_s = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}, \quad \operatorname{sn}(u;k) = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_1(u/2K|\tau)}{\vartheta_0(u/2K|\tau)}.$$

Jacobi 楕円関数のテータ関数による表現

Jacobi 楕円関数のテータ関数による表示

$$\mathrm{sn}(u;k) = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_1(u/2K|\tau)}{\vartheta_0(u/2K|\tau)},$$
$$\mathrm{cn}(u;k) = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_2(u/2K|\tau)}{\vartheta_0(u/2K|\tau)},$$
$$\mathrm{dn}(u;k) = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_3}\frac{\vartheta_3(u/2K|\tau)}{\vartheta_0(u/2K|\tau)},$$
$$\vartheta_k = \vartheta_k(0|\tau) \quad (\, k = 2, 3, 0\,), \quad \tau = \mathrm{i}\frac{K'}{K}.$$

まとめ

1. Jacobi 楕円関数 sn, cn, dn を，その零点／極を零点にもつ整関数の比で表したい．

   ⇒ テータ関数の導入．

2. Jacobi 楕円関数 sn, cn, dn をテータ関数の比で表す．

   - 零点・極を比較．周期を調べる．
   - 整関数である楕円関数（二重周期関数）は定数関数に限る．

次回の予定．

1. テータ関数の無限和による表示．

   Jacobi 楕円関数 sn, cn, dn が数値計算できます．

2. テータ関数の諸性質など．