楕円関数論 (6)
テータ関数（無限和表示，諸性質）

緒方　秀教

電気通信大学　大学院情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻

2020 年 12 月 13 日（日）

復習

- テータ関数（無限積）の導入.

$$\vartheta_1(v|\tau) = 2q^{1/4}\sin\pi v\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-2q^{2n}\cos 2\pi v+q^{4n}),$$

$$\vartheta_2(v|\tau) = 2q^{1/4}\cos\pi v\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+2q^{2n}\cos 2\pi v+q^{4n}),$$

$$\vartheta_3(v|\tau) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+2q^{2n-1}\cos 2\pi v+q^{4n-2}),$$

$$\vartheta_0(v|\tau) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-2q^{2n-1}\cos 2\pi v+q^{4n-2}),$$

$$\tau = \mathrm{i}\frac{K'}{K}, \quad q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\tau} = \mathrm{e}^{-\pi K'/K},$$

$$* \quad K = K(k) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad K' = K(k') \quad (\, k' = \sqrt{1-k^2}\,).$$

復習

- Jacobi 楕円関数のテータ関数による表示.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{sn}\, u &= \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2} \frac{\vartheta_1(u/2K|\tau)}{\vartheta_0(u/2K|\tau)}, \\
\mathrm{cn}\, u &= \frac{\vartheta_0}{\vartheta_2} \frac{\vartheta_2(u/2K|\tau)}{\vartheta_0(u/2K|\tau)}, \qquad \tau = \mathrm{i}\frac{K'}{K}. \\
\mathrm{dn}\, u &= \frac{\vartheta_0}{\vartheta_3} \frac{\vartheta_3(u/2K|\tau)}{\vartheta_0(u/2K|\tau)},
\end{aligned}
$$

今日の目的

テータ関数の無限和表示.

テータ関数の無限和表示を求めるには，次の等式が基本的である．

Jacobi の三重積公式 (Jacobi's triple product identity)

$$1+\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}(z^{2n}+z^{-2n}) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1}z^2)(1+q^{2n-1}z^{-2})$$

$$(\,|q|<1,\ z\neq 0\,).$$

Jacobi の三重積公式の証明

$$f(z) \equiv \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1}z^2)(1+q^{2n-1}z^{-2}).$$

$f(z)$ を z^2 のベキ級数で表すと，次の形になる．

$$f(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z^{2n}+z^{-2n}).$$

係数 a_n を求めたい．
そのために，$f(qz)$ を無限積，無限和両方で計算してみる．まずは無限積から．

$$\begin{aligned}
f(qz) &= \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n+1}z^2)(1+q^{2n-3}z^{-2}) \\
&= \frac{1+q^{-1}z^{-2}}{1+qz^2}\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1}z^2)(1+q^{2n-1}z^{-2}) \\
&= q^{-1}z^{-2}f(z),
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad qz^2 f(qz) = f(z).$$

Jacobiの三重積公式の証明

次に無限和の方を計算する.

$$f(qz) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\{(qz)^{2n} + (qz)^{-2n}\}$$
$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{2n} a_n z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{-2n} a_n z^{-2n},$$

$qz^2 f(qz) = f(z)$ であったから,

$$qz^2 f(qz) = qa_0 z^2 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{2n+1} a_n z^{2(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{-(2n-1)} a_n z^{-2(n-1)}$$
$$= q^{-1} a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{2n-1} a_{n-1} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{-(2n+1)} a_{n+1} z^{-2n}$$
$$= a_0 + \sum_{n=1} a_n(z^{2n} + z^{-2n}).$$

係数比較により, a_n の漸化式を得る.

$$a_n = q^{2n-1} a_{n-1} \quad (\, n = 1, 2, \ldots\,).$$

Jacobi の三重積公式の証明

$$a_1 = q a_0, \quad a_2 = q^3 a_1 = q^{1+3} a_0 = q^4 a_0,$$

$$\text{一般に} \quad a_n = q^{1+3+\cdots+(2n-1)} a_0 = q^{n^2} a_0.$$

$$\therefore \quad f(z) = a_0 \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} (z^{2n} + z^{-2n}) \right\}.$$

a_0 は q に依存するので，$a(q)$ と記すことにする．

$$\begin{aligned} f(z) &= a(q) \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} (z^{2n} + z^{-2n}) \right\} \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n-1} z^2)(1 + q^{2n-1} z^{-2}). \end{aligned}$$

次に，$a(q)$ を求めなければならない．

$$a(q)\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}(z^{2n}+z^{-2n})\right\}=\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1}z^2)(1+q^{2n-1}z^{-2}).$$

$z=\mathrm{i}$ を代入して,

$$a(q)\left\{1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\right\}=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})^2. \tag{1}$$

一方, $z=\sqrt{\mathrm{i}}$ を代入すると, $(\sqrt{\mathrm{i}})^{2n}=\mathrm{i}^n$, $(\sqrt{\mathrm{i}})^{-2n}=(-1)^n\mathrm{i}^n$ より, 無限和は $n=$ 偶数 の項のみ残ることに注意して,

$$a(q)\left\{1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{4n^2}\right\}=\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{4n-2}). \tag{2}$$

(1) で $q\to q^4$ として,

$$a(q^4)\left\{1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{4n^2}\right\}=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{8n-4})^2. \tag{3}$$

(3)÷(2) をつくると,

Jacobi の三重積公式の証明

$$\frac{a(q^4)}{a(q)} = \frac{\prod(1-q^{8n-4})^2}{\prod(1+q^{4n-2})} = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{8n-4})(1-q^{4n-2})$$
$$= \frac{\prod(1-q^{4n-2})(1-q^{8n-4})(1-q^{8n})}{\prod(1-q^{8n})}.$$

最右辺分子 $=$（$n \equiv 2 \mod 4$ についての積）$\times$（$n \equiv 4 \mod 8$ についての積）
$\times$（$n \equiv 0 \mod 8$ についての積）
$=$（$n =$ 偶数についての積）

と考えて，

$$\frac{a(q^4)}{a(q)} = \frac{\prod(1-q^{2n})}{\prod(1-q^{8n})}.$$

$$\frac{a(q)}{a(q^4)} = \frac{\prod(1-q^{8n})}{\prod(1-q^{2n})}, \quad \frac{a(q^4)}{a(q^{16})} = \frac{\prod(1-q^{32n})}{\prod(1-q^{8n})}, \ldots$$

一般に，$\displaystyle \frac{a(q^{4^r})}{a(q^{4^{r+1}})} = \frac{\prod(1-q^{2\cdot 4^{r+1}n})}{\prod(1-q^{2\cdot 4^r n})} \quad (r = 0, 1, 2, \ldots).$

$$\frac{a(q)}{a(q^{4^r})} = \frac{a(q)}{a(q^4)} \frac{a(q^4)}{a(q^{16})} \cdots \frac{a(q^{4^{r-1}})}{a(q^{4^r})} = \frac{\prod(1-q^{2\cdot 4^r n})}{\prod(1-q^{2n})}.$$

$r \to \infty$ とすると，$|q| < 1$ より $q^{2\cdot 4^r} \to 0$，そして，$\displaystyle \lim_{q\to 0} a(q) = 1$ であるから，

$$a(q) = \left\{ \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n}) \right\}^{-1}.$$

これにより，Jacobi の三重積公式が証明された． ■

テータ関数の無限和表示

$$1+\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}(z^{2n}+z^{-2n}) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1}z^2)(1+q^{2n-1}z^{-2})$$
$$(\,|q|<1,\ z\neq 0\,).$$

$q=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\tau}, z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi v}$ とおいて，

$$\begin{aligned}\vartheta_3(v|\tau) &= 1+2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\cos 2n\pi v \\ &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+2q^{2n-1}\cos 2\pi v+q^{4n-2}).\end{aligned}$$

$q=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\tau}, z=\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi v}$ とおいて，

$$\begin{aligned}\vartheta_0(v|\tau) &= 1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos 2n\pi v \\ &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-2q^{2n-1}\cos 2\pi v+q^{4n-2}).\end{aligned}$$

テータ関数の無限和表示

$$1+\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}(z^{2n}+z^{-2n}) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1}z^2)(1+q^{2n-1}z^{-2})$$
$$(\,|q|<1,\ z\neq 0\,).$$

$q=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\tau}$, $z=q^{1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi v}$ とおいて,

$$\begin{aligned}
&\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}v})(1+q^{2n-2}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}v})\\
&=1+\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}(q^n\mathrm{e}^{2n\pi\mathrm{i}v}+q^{-n}\mathrm{e}^{-2n\pi\mathrm{i}v})\\
&=1+q^{-1/4}\sum_{n=1}^{\infty} q^{(n+1/2)^2}\mathrm{e}^{2n\pi\mathrm{i}v}+q^{-1/4}\sum_{n=1}^{\infty} q^{(n-1/2)^2}\mathrm{e}^{2n\pi\mathrm{i}v}\\
&=1+q^{-1/4}\sum_{n=1}^{\infty} q^{(n+1/2)^2}\mathrm{e}^{2n\pi\mathrm{i}v}+q^{-1/4}\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1/2)^2}\mathrm{e}^{-2(n+1)\pi\mathrm{i}v}.
\end{aligned}$$

両辺に $q^{1/4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi v}$ を掛けて,

テータ関数の無限和表示

$$q^{1/4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi v}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}v})(1+q^{2n-2}\mathrm{e}^{-2n\pi\mathrm{i}v})$$

$$=q^{1/4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi v}+\sum_{n=1}^{\infty}q^{(n+1/2)^2}\mathrm{e}^{(2n+1)\pi\mathrm{i}v}+\sum_{n=0}^{\infty}q^{(n+1/2)^2}\mathrm{e}^{-(2n+1)\pi\mathrm{i}v}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}q^{(n+1/2)^2}\mathrm{e}^{(2n+1)\pi\mathrm{i}v}+\sum_{n=0}^{\infty}q^{(n+1/2)^2}\mathrm{e}^{-(2n+1)\pi\mathrm{i}v}=2\sum_{n=0}^{\infty}q^{(n+1/2)^2}\cos(2n+1)\pi v.$$

$$\vartheta_2(v|\tau)=2q^{1/4}\cos\pi v\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+2q^{2n}\cos 2\pi v+q^{4n})$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}q^{(n+1/2)^2}\cos(2n+1)\pi v.$$

同様に，Jacobi の三重積公式に $q=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\tau}$, $z=\mathrm{i}q^{1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi v}$ を代入して，

$$\vartheta_1(v|\tau)=2q^{1/4}\sin\pi v\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-2q^{2n}\cos 2\pi v+q^{4n})$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+1/2)^2}\sin(2n+1)\pi v.$$

（まとめ）テータ関数

$\operatorname{Im}\tau > 0,\ q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\tau}.$

$$\vartheta_1(v|\tau) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+1/2)^2}\sin(2n+1)\pi v$$
$$= 2q^{1/4}\sin\pi v\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-2q^{2n}\cos 2\pi v+q^{4n}).$$
$$\vartheta_2(v|\tau) = 2\sum_{n=0}^{\infty}q^{(n+1/2)^2}\cos(2n+1)\pi v$$
$$= 2q^{1/4}\cos\pi v\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+2q^{2n}\cos 2\pi v+q^{4n})$$

（まとめ）テータ関数

$\operatorname{Im}\tau > 0,\ q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\tau}.$

$$\begin{aligned}
\vartheta_3(v|\tau) &= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\cos 2n\pi v \\
&= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+2q^{2n-1}\cos 2\pi v + q^{4n-2}), \\
\vartheta_0(v|\tau) &= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos 2n\pi v \\
&= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-2q^{2n-1}\cos 2\pi v + q^{4n-2}).
\end{aligned}$$

無限和 $\sum q^{n^2} \times (\cdots)$ ($|q| < 1$)：極めて収束が速い．

テータ関数の $v = 0$ における値

テータ関数の $v = 0$ における値は重要でよく使われる.

$$\vartheta_1' \equiv \vartheta_1'(0|\tau) = 2\pi q^{1/4} \prod_{n=1} (1 - q^{2n})^3,$$

$$\vartheta_2 \equiv \vartheta_2(0|\tau) = 2 q^{1/4} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 + q^{2n})^2,$$

$$\vartheta_3 \equiv \vartheta_3(0|\tau) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 + q^{2n-1})^2,$$

$$\vartheta_0 \equiv \vartheta_0(0|\tau) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 - q^{2n-1})^2.$$

（注意）$\vartheta_1(0|\tau) = 0$.

Jacobi 楕円関数パラメータのテータ関数表示

これから次のものを求める.

- Jacobi 楕円関数の諸パラメータの $\vartheta_1', \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_0$ による表示.
- $\vartheta_1', \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_0$ の関係式.

具体的には次の等式を得る.

$$\vartheta_1' = \pi\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_0, \quad {\vartheta_0}^4 + {\vartheta_2}^4 = {\vartheta_3}^4,$$
$$k = \frac{{\vartheta_3}^2}{{\vartheta_2}^2}, \quad k' = \frac{{\vartheta_0}^2}{{\vartheta_3}^2}, \quad K = \frac{\pi}{2}{\vartheta_3}^2.$$

Jacobi 楕円関数パラメータのテータ関数表示

テータ関数の無限積表示から直ちに次の式を得る．

$$\vartheta_1' = 2\pi q^{1/4} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n})^3,$$

$$\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_0 = 2q^{1/4} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n})^3 \underline{(1+q^{2n})^2(1-q^{4n-2})^2}.$$

ここで，下線部の無限積に関して次が成り立つ．

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n})(1-q^{4n-2}) = \frac{\prod(1-q^{4n})(1-q^{4n-2})}{\prod(1-q^{2n})},$$

右辺の分子 $=$（$n \equiv 0 \mod 4$ についての積）$\times$（$n \equiv 2 \mod 4$ についての積）

$$= （n = \text{偶数についての積}） = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}),$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n})(1-q^{4n-2}) = 1,$$

$$\therefore \quad \vartheta_1' = \pi\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_0 = 2\pi q^{1/4}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^3.$$

Jacobi 楕円関数パラメータのテータ関数表示

$$\mathrm{dn}(u;k) = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_3}\frac{\vartheta_3(u/2K|\tau)}{\vartheta_0(u/2K|\tau)} \quad (\,\tau = \mathrm{i}K'/K\,)$$

で $u = K$ とおくと，$\mathrm{dn}\,K = k'$ より，

$$k' = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_3}\frac{\vartheta_3(1/2|\tau)}{\vartheta_0(1/2|\tau)}.$$

テータ関数の無限積表示に直接 $v = 1/2$ を代入することにより，

$$\vartheta_0(1/2|\tau) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1})^2 = \vartheta_3,$$

$$\vartheta_3(1/2|\tau) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n-1})^2 = \vartheta_0.$$

$$\therefore \quad k' = \frac{{\vartheta_0}^2}{{\vartheta_3}^2}.$$

Jacobi 楕円関数パラメータのテータ関数表示

$$\mathrm{sn}(u+\mathrm{i}K';k)=\frac{1}{k\,\mathrm{sn}(u;k)},\quad \mathrm{sn}(u;k)=\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_1(u/2K|\tau)}{\vartheta_0(u/2K|\tau)}\quad (\tau=\mathrm{i}K'/K).$$

第 1 式で $u=K$ とおくと，第 2 式より

$$\frac{1}{k}=\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_1(1/2+\tau/2|\tau)}{\vartheta_0(1/2+\tau/2|\tau)}.$$

テータ関数の無限積表示に直接 $v=1/2+\tau/2$ を代入することにより，

$$\begin{aligned}\vartheta_1(1/2+\tau/2|\tau)&=q^{3/4}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n+1})(1+q^{2n-3})\\&=q^{3/4}\frac{1+q^{-1}}{1+q}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1})^2=q^{-1/4}\vartheta_3,\end{aligned}$$

$$\vartheta_0(1/2+\tau/2|\tau)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n})(1+q^{2n-2})=q^{-1/4}\vartheta_2,$$

$$\therefore\quad k=\frac{{\vartheta_2}^2}{{\vartheta_3}^2}.$$

Jacobi 楕円関数パラメータのテータ関数表示

$$k = \frac{{\vartheta_2}^2}{{\vartheta_3}^2}, \quad k' = \frac{{\vartheta_0}^2}{{\vartheta_3}^2}.$$

$k^2 + k'^2 = 1$ に代入して，

$${\vartheta_0}^4 + {\vartheta_2}^4 = {\vartheta_3}^4.$$

$$\mathrm{sn}(u;k) = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_1(u/2K|\tau)}{\vartheta_0(u/2K|\tau)}.$$

両辺を微分して $u = 0$ とおいて，

$$1 = \frac{1}{2K}\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_0} = \frac{\pi}{2K}{\vartheta_3}^2.$$

ここで，2 番めの等号で $\vartheta_1' = \pi\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_0$ を用いた．

$$\therefore \quad K = \frac{\pi}{2}{\vartheta_3}^2.$$

$*$ 等式 $\vartheta_0^4 + \vartheta_2^4 = \vartheta_3^4$ ($\vartheta_k = \vartheta_k(0|\tau)$) は Jacobi 楕円関数のテータ関数表示から導出したので，導出過程では $\tau = it$，$t > 0$ を仮定しているが，$\vartheta_k(0|\tau)$ は $\mathrm{Im}\,\tau > 0$ で解析関数なので，複素関数論の一致の定理より，すべての τ ($\mathrm{Im}\,\tau > 0$) に対して成り立つ．

Jacobi 楕円関数のテータ関数表示

$$\mathrm{sn}(u;k) = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_1(u/2K|\tau)}{\vartheta_0(u/2K|\tau)}, \quad \mathrm{cn}(u;k) = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_2(u/2K|\tau)}{\vartheta_0(u/2K|\tau)},$$

$$\mathrm{dn}(u;k) = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_3}\frac{\vartheta_3(u/2K|\tau)}{\vartheta_0(u/2K|\tau)}, \quad \tau = \mathrm{i}\frac{K'}{K},$$

$$k = \frac{{\vartheta_2}^2}{{\vartheta_3}^2}, \quad k' = \frac{{\vartheta_0}^2}{{\vartheta_3}^2}.$$

これらから次式を得る（$\vartheta_k > 0$ に注意）.

sn, cn, dn のテータ関数表示

$$\mathrm{sn}(u;k) = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\vartheta_1(u/2K|\tau)}{\vartheta_0(u/2K|\tau)}, \quad \mathrm{cn}(u;k) = \sqrt{\frac{k'}{k}}\frac{\vartheta_2(u/2K|\tau)}{\vartheta_0(u/2K|\tau)},$$

$$\mathrm{dn}(u;k) = \sqrt{k'}\frac{\vartheta_3(u/2K|\tau)}{\vartheta_0(u/2K|\tau)}, \quad \tau = \mathrm{i}\frac{K'}{K}.$$

これで，Jacobi 楕円関数 sn, cn, dn が数値計算できます.

Jacobi 楕円関数の数値計算法

sn, cn, dn の数値計算法

1. 母数 k から第 1 種完全楕円積分 $K = K(k)$, $K' = K(k')$ ($k' = \sqrt{1-k^2}$) を計算する.

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

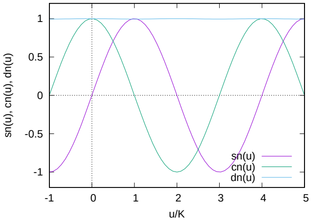
$K(k)$ は台形則（別動画「楕円関数論（１）」参照），あるいは，算術幾何平均（後述）で計算する.

2. $q = \exp(-\pi K'/K)$ ($= \exp(\mathrm{i}\pi\tau)$, $\tau = \mathrm{i}K'/K$).
3. sn, cn, dn のテータ関数表示を用いて計算する.

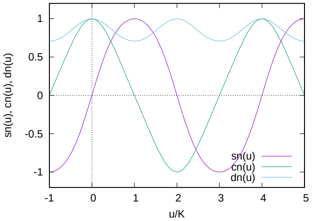
$$\vartheta_k \approx \sum_n q^{n^2} \times (\cdots), \quad q < 1$$

だから，テータ関数の計算は極めて速く収束する.

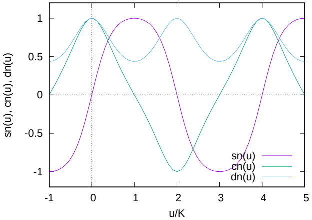
Jacobi 楕円関数を計算してみよう



$k = 0.1$



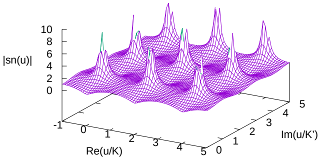
$k = \sqrt{0.5}$



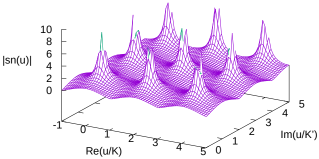
$k = 0.9$

k	K
0.1	1.57474 55615 17356
$\sqrt{0.5}$	1.85407 46773 01372
0.9	2.28054 91384 22770

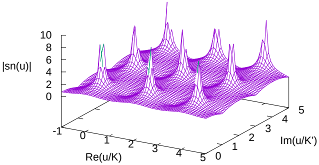
Jacobi 楕円関数を計算してみよう



$|\,\mathrm{sn}\ u|$



$|\,\mathrm{cn}\ u|$



複素平面上の $|\,\mathrm{sn}\ u|, |\,\mathrm{cn}\ u|, |\,\mathrm{dn}\ u|$ のグラフ ($k = \sqrt{0.5}$).

まとめ

- テータ関数の無限和表示.
    - Jacobi の三重積公式.
    - 無限和は $\approx \sum q^{n^2} \times (\cdots)$, $|q| < 1$ なので，極めて速く収束する.
- Jacobi 楕円関数の諸パラメータと $\vartheta_k = \vartheta_k(0|\tau)$ に対する関係式.
- Jacobi 楕円関数の数値計算法.

（補遺）第１種完全楕円積分の数値計算

（動画「楕円関数論番外編（１）：算術幾何平均と楕円積分」参照）

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

- 正の数 a, b に対し，数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を次の漸化式で定める．

$$a_0 = a, \quad b_0 = b, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad (\, n = 0, 1, 2, \ldots\,).$$

$$\Downarrow$$

a, b の算術幾何平均　$M(a,b) \equiv \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$

$*$ $\lim a_n = \lim b_n$ の収束は極めて速い．

- $K(k) = \dfrac{\pi/2}{M(1,k')} \quad (\, k' = \sqrt{1-k^2}\,).$