楕円関数論 (8)
テータ関数の応用：分割数

緒方　秀教

電気通信大学　大学院情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻

2020 年 12 月 19 日（土）

今回の内容

- テータ関数：無限和・無限積両方で与えられる.
- Jacobi の三重積公式

無限和と無限積を結ぶ不思議な等式の応用から,
いくつかの数論の定理を得る.

- Euler の五角数公式とそれから得られる数論的結果.
- 分割数.

テータ関数の定数値から得られる等式

$$\vartheta_1' = \vartheta_1'(0|\tau) = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) q^{(n+1/2)^2} = 2\pi q^{1/4} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n})^3,$$

$$\vartheta_2 = \vartheta_2(0|\tau) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1/2)^2} = 2q^{1/4} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n})(1+q^{2n})^2,$$

$$\vartheta_3 = \vartheta_3(0|\tau) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} = \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n})(1+q^{2n-1})^2,$$

$$\vartheta_0 = \vartheta_0(0|\tau) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} = \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n})(1-q^{2n-1})^2,$$

$$(\operatorname{Im} \tau > 0, \quad q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\tau}).$$

$$\vartheta_0^4 + \vartheta_2^4 = \vartheta_3^4, \quad \vartheta_1' = \pi \vartheta_2 \vartheta_3 \vartheta_0.$$

これらの式から，いろいろと面白い等式が得られる．

テータ関数の定数値から得られる等式

ϑ_1' の表式から，

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)q^{n(n+1)/2} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2n+1)q^{1+2+\cdots+n} = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^3.$$

$\vartheta_0^4 + \vartheta_2^4 = \vartheta_3^4$ より，

$$(1-2q+2q^4-2q^9+\cdots)^4 + 16q(1+q^{1\cdot 2}+q^{2\cdot 3}+\cdots)^4 = (1+2q+2q^4+2q^9+\cdots)^4.$$

$\vartheta_1' = \pi\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_0$ より

$$1-3q^{1\cdot 2}+5q^{2\cdot 3}-7q^{3\cdot 4}+\cdots = (1+q^{1\cdot 2}+q^{2\cdot 3}+q^{3\cdot 4}+\cdots)(1+2q+2q^4+2q^9+\cdots)(1-2q+2q^4-2q^9+\cdots).$$

Euler の五角数公式

Jacobi の三重積公式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^{2n} = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1}z^2)(1+q^{2n-1}z^{-2}).$$

$z = \mathrm{i}q^{1/4}$, $q \to q^{3/2}$ を代入する．

$$左辺 = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n(3n+1)/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n(3n-1)/2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n(3n+1)/2},$$

$$\begin{aligned}
右辺 &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{3n})(1-q^{3n-1})(1-q^{3n-2}) \\
&= (n \equiv 0 \mod 3 \text{ についての積}) \\
&\quad \times (n \equiv 1 \mod 3 \text{ についての積}) \\
&\quad \times (n \equiv 2 \mod 3 \text{ についての積}) \\
&= (\text{すべての } n \text{ についての積}) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n).
\end{aligned}$$

Euler の五角数公式

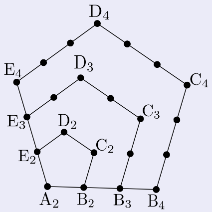
Euler の五角数公式

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n(3n-1)/2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n(3n+1)/2}=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n).$$

$$\begin{aligned}1-q-q^2+q^5+q^7-q^{12}-q^{15}+\cdots\\ =(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\cdots.\end{aligned}$$

「五角数」の名の由来

正五角形 $A_2B_nC_nD_nE_n$ 上の頂点の数が $\dfrac{1}{2}n(3n-1)$.



Euler の五角数公式

右辺の $\prod(1-q^n)$ を展開する．

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) = 1+\sum_{d=1}^{\infty}(-1)^d \sum_{n_1>n_2>\cdots>n_d>0} q^{n_1+n_2+\cdots+n_d}$$
$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\{E(n)-U(n)\}q^n,$$

$E(n)$: 偶数個の異なる正整数の和で n を表す方法の数,

$U(n)$: 奇数個の異なる正整数の和で n を表す方法の数.

（例）$n=7$ の場合，

$$7 = 6+1 = 5+2 = 4+3$$
$$= 7 = 4+2+1,$$
$$\therefore \quad E(7)=3, \quad U(7)=2.$$

Euler の五角数公式より,

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n(3n-1)/2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n(3n+1)/2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\{E(n)-U(n)\}q^n.$$

Euler の五角数公式

Euler の五角数公式より,

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n(3n-1)/2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n(3n+1)/2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\{E(n)-U(n)\}q^n.$$

定理

自然数（正整数）$n\in\mathbb{N}$ に対し,

- $E(n)$：偶数個の異なる自然数の和で n を表す方法の数.
- $U(n)$：奇数個の異なる自然数の和で n を表す方法の数.

$$E(n)-U(n)=\begin{cases}(-1)^m & \exists m\in\mathbb{N} \text{ s.t. } n=\frac{1}{2}m(3m\pm 1)\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

Euler の五角数公式

定理

自然数（正整数）$n \in \mathbb{N}$ に対し，

- $E(n)$: 偶数個の異なる自然数の和で n を表す方法の数.
- $U(n)$: 奇数個の異なる自然数の和で n を表す方法の数.

$$E(n) - U(n) = \begin{cases} (-1)^m & \exists m \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n = \dfrac{1}{2}m(3m \pm 1) \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$E(n)$	0	0	1	1	2	2	3	3	4	5	6	7	9	11	13
$U(n)$	1	1	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	9	11	14
m	1	1			2		2					3			3

分割数

分割数 $p(n)$

自然数（正整数）n に対し，n を自然数の和で表す方法の数を n の**分割数**とよび，$p(n)$ と記す．

（例）

- $n=3$ に対し，

$$3 = 2+1 = 1+1+1, \quad \therefore \quad p(3)=3.$$

- $n=4$ に対し

$$4 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+1+1+1, \quad \therefore \quad p(4)=5.$$

- $n=5$ に対し

$$\begin{aligned}5 &= 4+1 = 3+2 = 3+1+1 = 2+2+1 = 2+1+1+1\\ &= 1+1+1+1+1, \quad \therefore \quad p(5)=7.\end{aligned}$$

分割数

分割数 $p(n)$ の母関数

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{-1} = 1+\sum_{n=1}^{\infty} p(n)q^n.$$

（考え方）

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{-1} = \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n+q^{2n}+\cdots).$$

右辺を展開して q の各ベキを作ると，q^n の係数が分割数 $p(n)$ となる．

$$\underbrace{(1+q^1+q^{1\cdot 2}+q^{1\cdot 3}+\cdots)}_{(1)}\underbrace{(1+q^2+q^{2\cdot 2}+\cdots)}_{(2)}\underbrace{(1+q^3+q^{3\cdot 2}+\cdots)}_{(3)}\cdots$$

例えば，q^3 は

- (1) から 1，(2) から 1，(3) から q^3 を拾ってつくる$\rightarrow 3$
- (1) から q^1，(2) から q^2，(3) から 1 を拾ってつくる$\rightarrow 1+2=3$
- (1) から $q^{1\cdot 3}$，(2) から 1，(3) から 1 を拾ってつくる$\rightarrow 1\times 3=3$

の 3 通りの作り方があるので，q^3 の係数は $p(3)=3$ となる．

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n(3n-1)/2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n(3n+1)/2}$$

$$= 1 + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m (q^{\kappa_1(m)} + q^{\kappa_2(m)})$$

$$\text{with} \quad \kappa_1(m) = \frac{1}{2}m(3m-1), \quad \kappa_2(m) = \frac{1}{2}m(3m+1),$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n) q^n.$$

両者の積 $(=1)$ をとり係数比較することにより，
分割数 $p(n)$ に対する漸化式を得る．

分割数

分割数 $p(n)$ に対する漸化式

$$
\begin{aligned}
p(0) &= 1, \\
p(n) &= p(n-\kappa_1(1)) + p(n-\kappa_2(1)) - p(n-\kappa_1(2)) - p(n-\kappa_2(2)) \\
&\qquad + p(n-\kappa_1(3)) + p(n-\kappa_2(3)) - \cdots \\
&= p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) \\
&\qquad + p(n-12) + p(n-15) - \cdots
\end{aligned}
$$

with $\quad \kappa_1(m) = \dfrac{1}{2}m(3m-1), \quad \kappa_2(m) = \dfrac{1}{2}m(3m+1) \quad (\, m = 1, 2, \ldots\,).$

分割数

∗ 分割数 $p(n)$ に対する Hardy-Ramanujan の漸近公式

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right).$$

映画「奇蹟がくれた数式」のクライマックスシーンは，
この漸近公式を導出するところだった．

n	(1) $p(n)$	(2) Hardy-Ramanujan	比 (2)/(1)
50	2 04226	2 17590.499 . . .	1.065
100	1905 69292	1992 80893.350 . . .	1.046
150	4 08532 35313	4 23693 36269.101 . . .	1.037
200	397 29990 29388	410 02514 32187.829 . . .	1.032

分割数

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n)q^n.$$

複素関数論における Goursat の定理より

$$p(n) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C z^{-n-1} \prod_{n=1}^{\infty}(1-z^n)^{-1} \mathrm{d}z,$$

C : 原点 O の周りを周回する閉積分路.

Hardy & Ramanujan は，この右辺の複素積分の値を注意深く見積もることによって，$p(n)$ の漸近公式を導出したそうである.

（参考文献）藤原正彦 : Ramanujan の数学，数学，57 巻（2005 年），407–422.

まとめ

- Jacobi の三重積公式，テータ関数が与える無限和と無限積との不思議な関係を用いて，様々な数論的公式を作り出した．
- Euler の五角数公式→数論の公式．
- 分割数（漸化式，Hardy-Ramanujan の漸近公式）．

次回から Weierstrass の楕円関数に入ります．