楕円関数論 (9)
Weierstrass の楕円関数

緒方　秀教

電気通信大学　大学院情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻

2020 年 12 月 22 日（火）

これからやりたいこと

楕円関数の定義

二重周期性を持つ有理型関数.

- しかし，具体的な楕円関数として，我々はまだ Jacobi の楕円関数しか知らない.
- 関数 sn, cn, dn を考えて，複素関数に拡張してみたら，たまたま二重周期性を持っていた.

これからやりたいこと

楕円関数の定義

二重周期性を持つ有理型関数.

- しかし，具体的な楕円関数として，我々はまだ Jacobi の楕円関数しか知らない.
- 関数 sn, cn, dn を考えて，複素関数に拡張してみたら，たまたま二重周期性を持っていた.

これからやりたいこと

周期 ω_1, ω_2 を先に与えて，ω_1, ω_2 を周期に持つ楕円関数をつくる.

これからやりたいこと

周期 ω_1, ω_2 を先に与えて，ω_1, ω_2 を周期に持つ楕円関数をつくる．

どういうアプローチをとるか？

これからやりたいこと

周期 ω_1, ω_2 を先に与えて，ω_1, ω_2 を周期に持つ楕円関数をつくる.

どういうアプローチをとるか？

関数 $\dfrac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$ からヒントを得る.

- 周期 1 の周期関数.
- 部分分数展開

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}.$$

これからやりたいこと

周期格子 Λ

$$\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C} - \{0\}, \quad \mathrm{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0,$$
$$\text{周期格子} \quad \Lambda \equiv \{\, m\omega_1 + n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z} \,\}.$$

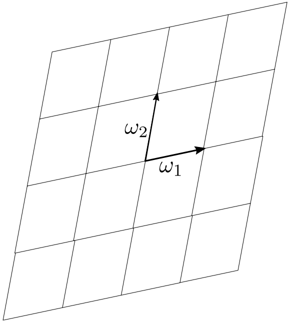
周期 ω_1, ω_2 を周期に持つ楕円関数を

$$\sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(u-\omega)^s}$$

の形でつくろう.

$$\Downarrow$$

Weierstrass の楕円関数



周期格子

次の形の楕円関数をつくりたい．

$$\sum_{\omega\in\Lambda}\frac{1}{(u-\omega)^s}$$

では，s はどの範囲の値なら，右辺は収束するか？

（参考）

$$\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n)^2}\quad\leftrightarrow\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\quad\begin{cases}s=2,3,\ldots & \text{収束}\\ s=1 & \text{発散.}\end{cases}$$

周期格子

次の形の楕円関数をつくりたい.

$$\sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(u-\omega)^s}$$

では，s はどの範囲の値なら，右辺は収束するか？

（参考）

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} \quad \leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \begin{cases} s = 2, 3, \ldots & \text{収束} \\ s = 1 & \text{発散.} \end{cases}$$

基本補題

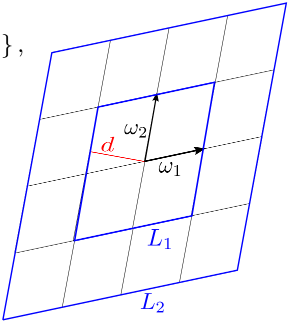
$$s \geq 3 \quad \text{ならば} \quad \sum_{\omega \in \Lambda - \{0\}} \frac{1}{|\omega|^s} < \infty.$$

基本補題

$$s \geq 3 \quad \text{ならば} \quad \sum_{\omega \in \Lambda - \{0\}} \frac{1}{|\omega|^s} < \infty.$$

（証明）

$$L_k = \{\, x\omega_1 + y\omega_2 \mid x, y \in \mathbb{R},\ \max\{|x|, |y|\} = k \,\},$$
$$\Lambda_k = \Lambda \cap L_k \quad (\quad k = 1,\ 2,\ \ldots \quad),$$
$$d = \min\{\, |z| \mid z \in L_1 \,\}$$



$$\sum_{\omega \neq 0} \frac{1}{|\omega|^s} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\omega \in \Lambda_k} \frac{1}{|\omega|^s}$$
$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8k}{(kd)^s} = \frac{8}{d^s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{s-1}} < \infty.$$

楕円関数 $\sum_\omega (u-\omega)^{-3}$

前頁の「基本補題」から，次の形の楕円関数を考える．

$$f(u) \equiv \sum_{\omega\in\Lambda} \frac{1}{(u-\omega)^3}.$$

- $f(u)$ は $\mathbb{C}$ で有理型関数である（$u=\omega\in\Lambda$ に 3 位の極を持つ）．
  証明は「補遺」に記してある．
- $f(u)$ は奇関数である．
  $$f(-u) = -\sum_{\omega\neq 0} \frac{1}{(u+\omega)^3} = -\sum_{\omega\neq 0} \frac{1}{(u-\omega)^3} = -f(u).$$
  $-\omega$ について和を取るのは，ω について和を取るのと同じ．
- $f(u)$ は $\omega\in\Lambda$ を周期にもつ楕円関数である．

Weierstrass の $\wp$ 関数

- 位数 1 の楕円関数は存在しない．

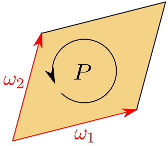
  復習（動画「楕円関数論（4）」参照））

$$\text{楕円関数の位数} \equiv \text{周期平行四辺形内の零点の個数}$$
$$= \text{周期平行四辺形内の極の個数.}$$

ただし，零点・極は多重度分ダブって数える．

$\because$ $f(u)$ を楕円関数（基本周期 ω_1, ω_2），P を周期平行四辺形とする．
留数定理と $f(u)$ の周期性より

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_P f(u) \mathrm{d}u = \sum (P \text{ 内の極の留数}) = 0.$$



よって，P 内に $f(u)$ の 1 位の留数 $\neq 0$ の極が 1 個だけあることはあり得ない． ■

- $f(u) = \sum_{\omega \neq 0} (u - \omega)^{-3}$ は位数 3 の楕円関数．

Weierstrass の $\wp$ 関数

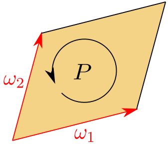
- 位数 1 の楕円関数は存在しない．
  復習（動画「楕円関数論（４）」参照））

$$\text{楕円関数の位数} \equiv \text{周期平行四辺形内の零点の個数}$$
$$= \text{周期平行四辺形内の極の個数.}$$

ただし，零点・極は多重度分ダブって数える．

$\because$ $f(u)$ を楕円関数（基本周期 ω_1, ω_2），P を周期平行四辺形とする．
留数定理と $f(u)$ の周期性より

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_P f(u) \mathrm{d}u = \sum (P \text{ 内の極の留数}) = 0.$$



よって，P 内に $f(u)$ の 1 位の留数 $\neq 0$ の極が 1 個だけあることはあり得ない． ■

- $f(u) = \sum_{\omega \neq 0} (u - \omega)^{-3}$ は位数 3 の楕円関数．

位数 2 の楕円関数をつくってみる．

Weierstrass の $\wp$ 関数

$$f(u) - \frac{1}{u^3} = \sum_{\omega \neq 0} \frac{1}{(u-\omega)^3}$$

の両辺を原点 O から点 $u \in \mathbb{C} - \Lambda$ を結ぶ路の上で積分する．
右辺は一様収束ゆえ項別積分が可能であり，

$$\int_0^u \left(f(u) - \frac{1}{u^3} \right) \mathrm{d}u = -\frac{1}{2} \sum_{\omega \neq 0} \left(\frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right),$$

$$\frac{1}{u^2} - 2\int_0^u \left(f(u) - \frac{1}{u^3} \right) \mathrm{d}u = \frac{1}{u^2} + \sum_{\omega \neq 0} \left(\frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

右辺が，“Weierstrass の $\wp$ 関数” である．

Weierstrass の $\wp$（ペー）関数

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{\omega\in\Lambda-\{0\}} \left(\frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right).$$

$\wp$ 関数の特徴.

- 全複素平面 $\mathbb{C}$ で有理型関数であり,

$$\omega \in \Lambda = \{\, m\omega_1 + n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z} \,\}$$

  に 2 位の極をもつ.
- 偶関数である.
- 楕円関数である. $\omega \in \Lambda$ を周期にもつ.
- 楕円関数としての位数は 2 である.

$$\text{周期平行四辺形内の零点の個数} = \text{周期平行四辺形内の極の個数} = 2.$$

Weierstrass の $\wp$ 関数

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{\omega \in \Lambda - \{0\}} \left(\frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

$\wp(u)$ の各特徴の証明

- $\wp(u)$ は $\mathbb{C}$ で有理型関数であり，$\omega \in \Lambda$ に 2 位の極をもつ．

$$\frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega^2}\left(1 - \frac{u}{\omega}\right)^{-2} - \frac{1}{\omega^2} = \frac{2u}{\omega^3} + \mathrm{O}(\omega^{-4})$$

  であるから，$\wp(u)$ の各項は $\mathrm{O}(\omega^{-3})$ であり，無限和は収束する．
  ちゃんとした証明は「補遺」に記す．

- $\wp(u)$ は偶関数であること．
  $f(u) = \sum_{\omega \neq 0} (u-\omega)^{-3}$ が奇関数であることと同様にして示される．

Weierstrass の $\wp$ 関数

$\wp(u)$ の各特徴の証明

- $\wp(u)$ が楕円関数であること．
  $\wp'(u) = -2\sum(u-\omega)^{-3}$ は楕円関数であったから，$\omega \in \Lambda$ とすると，
  $$\wp'(u+\omega) - \wp'(u) = 0.$$
  両辺を積分して，
  $$\wp(u+\omega) - \wp(u) = \text{const.}$$
  $u = -\omega/2$ を代入すると，$\wp(u)$ は偶関数であるから，
  $$\text{const.} = \wp(\omega/2) - \wp(-\omega/2) = \wp(\omega/2) - \wp(\omega/2) = 0.$$
- 楕円関数としての位数は 2 であること．
  ほぼ明らかに思えるが，ちゃんとした証明を「補遺」中の，$\wp(u)$ が $\mathbb{C}$ で有理型関数であることの証明の中で述べる．

$\wp(u)$ が満たす微分方程式

これから $\wp(u)$ が満たす微分方程式を求める．
以下の議論で，楕円関数の性質が有機的に用いられていることに注意．

$$
\begin{aligned}
\wp(u) &= \frac{1}{u^2} + \sum_{\omega \neq 0} \left(\frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \\
&= \frac{1}{u^2} + \sum_{\omega \neq 0} \left\{ \frac{1}{\omega^2} \left(1 - \frac{u}{\omega} \right)^{-2} - \frac{1}{\omega^2} \right\} \\
&= \frac{1}{u^2} + \sum_{\omega \neq 0} \left[\frac{1}{\omega^2} \left\{ 1 + 2\frac{u}{\omega} + 3\left(\frac{u}{\omega} \right)^2 + \cdots \right\} - \frac{1}{\omega^2} \right] \\
&= \frac{1}{u^2} + 2 \left(\sum_{\omega \neq 0} \frac{1}{\omega^3} \right) u + 3 \left(\sum_{\omega \neq 0} \frac{1}{\omega^4} \right) u^2 + \cdots .
\end{aligned}
$$

ここで，奇数 s に対し $\displaystyle\sum_{\omega \neq 0} \omega^{-s} = 0$ であることに注意．

$$
\because \quad \sum_{\omega \neq 0} \frac{1}{\omega^s} = \sum_{\omega \neq 0} \frac{1}{(-\omega)^s} = -\sum_{\omega \neq 0} \frac{1}{\omega^s}.
$$

$\wp(u)$ が満たす微分方程式

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + 3G_4u^2 + 5G_6u^4 + \cdots,$$

$$G_{2k} = \sum_{\omega\in\Lambda-\{0\}} \frac{1}{\omega^{2k}} \quad (k = 2, 3, \dots) \quad \text{Eisenstein 級数}.$$

$$\begin{aligned}
\wp'(u) &= -\frac{2}{u^3} + 6G_4u + 20G_6u^3 + \mathrm{O}(u^5),\\
\wp'(u)^2 &= \frac{4}{u^6} - 24G_4\frac{1}{u^2} - 80G_6 + \mathrm{O}(u^2),\\
4\wp(u)^3 &= 4\frac{1}{u^6} + 36G_4\frac{1}{u^2} + 60G_6 + \mathrm{O}(u^2),\\
\wp'(u)^2 - 4\wp(u)^3 &= -60G_4\frac{1}{u^2} - 140G_6 + \mathrm{O}(u^2),\\
\therefore \quad \wp'(u)^2 - 4\wp(u)^3 &+ 60G_4\wp(u) + 140G_6 = \mathrm{O}(u^2).
\end{aligned}$$

$\wp(u)$ が満たす微分方程式

$$\wp'(u)^2 - 4\wp(u)^3 + 60G_4\wp(u) + 140G_6 = \mathrm{O}(u^2). \tag{1}$$

左辺は楕円関数であり，極があるとすれば $u = \omega \in \Lambda$ に限る．
ところが，右辺をみれば $u \to 0$ で両辺 $\to 0$ であり，$u = 0$ には極はない．
二重周期性より，左辺は全複素平面で極を持たない楕円関数である．
極を持たない楕円関数は定数関数に限るから，

$$\wp'(u)^2 - 4\wp(u)^3 + 60G_4\wp(u) + 140G_6 = \mathrm{const}.$$

(1) で $u \to 0$ とすることにより，$\mathrm{const}. = 0$.

$\wp(u)$ が満たす微分方程式

$$\wp'(u)^2 - 4\wp(u)^3 + 60G_4\wp(u) + 140G_6 = \mathrm{O}(u^2). \tag{1}$$

左辺は楕円関数であり，極があるとすれば $u = \omega \in \Lambda$ に限る．
ところが，右辺をみれば $u \to 0$ で両辺 $\to 0$ であり，$u = 0$ には極はない．
二重周期性より，左辺は全複素平面で極を持たない楕円関数である．
極を持たない楕円関数は定数関数に限るから，

$$\wp'(u)^2 - 4\wp(u)^3 + 60G_4\wp(u) + 140G_6 = \text{const.}$$

(1) で $u \to 0$ とすることにより，const. $= 0$.

$\wp$ 関数が満たす微分方程式

$$\wp'(u)^2 = 4\wp(u)^3 - g_2\wp(u) - g_3,$$

$$g_2 = 60\sum_{\omega\in\Lambda-\{0\}}\frac{1}{\omega^4}, \quad g_3 = 140\sum_{\omega\in\Lambda-\{0\}}\frac{1}{\omega^6}.$$

$\wp(u)$ が満たす微分方程式

$$\omega_3 := -\omega_1 - \omega_2, \quad \text{i.e.} \quad \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0.$$

$$e_j := \wp\left(\frac{\omega_j}{2}\right), \quad j = 1, 2, 3.$$

$\wp(u) - e_j$ ($j = 1, 2, 3$) は 2 位の楕円関数であり，
$u \equiv \omega_j/2 \mod \Lambda$ に零点を持つ．

- $2(\omega_j/2) \equiv 0 \mod \Lambda$,
- $\wp(u) - e_j$ の極は $u \equiv 0 \mod \Lambda$（2 位）だけ.
- 楕円関数の $\sum$（零点）$\equiv \sum$（極） $\mod \Lambda$.
  （動画「楕円関数論（４）」参照）

  よって，$\wp(u)$ の $\sum$（零点）$\equiv 0 \mod \Lambda$.

$\therefore$ $\wp(u) - e_j$ ($j = 1, 2, 3$) の零点は $u \equiv \omega_j/2 \mod \Lambda$ だけであり，
それは 2 位の零点である ($\wp'(\omega_j/2) = 0$).

$\wp(u)$ が満たす微分方程式

$$\wp'(u)^2, \quad (\wp(u)-e_1)(\wp(u)-e_2)(\wp(u)-e_3).$$

両者は同じ周期を持つ楕円関数であり，
$u \equiv \omega_1/2, \omega_2/2, \omega_3/2$ に 2 位の零点を持ち， $u \equiv 0$ に 6 位の極を持つ．
したがって， 両者の比は全複素平面で正則な楕円関数であり，
Liouville の定理により定数である：

$$\wp'(u)^2 = C(\wp(u)-e_1)(\wp(u)-e_2)(\wp(u)-e_3) \quad (\ C\ :\ \text{const.}\ ).$$

$$\text{左辺} = \left(-\frac{2}{u^3}+\cdots\right)^2 = \frac{4}{u^6}+\cdots,$$

$$\text{右辺} = C\left(\frac{1}{u^2}+\cdots\right)\left(\frac{1}{u^2}+\cdots\right)\left(\frac{1}{u^2}+\cdots\right) = \frac{C}{u^6}+\cdots,$$

$$\therefore \quad C = 4.$$

$$\wp'(u)^2 = 4(\wp(u)-e_1)(\wp(u)-e_2)(\wp(u)-e_3).$$

$\wp(u)$ が満たす微分方程式

まとめ：$\wp(u)$ が満たす微分方程式

$$\begin{aligned}\wp'(u)^2 &= 4\wp(u)^3 - g_2\wp(u) - g_3\\ &= 4(\wp(u)-e_1)(\wp(u)-e_2)(\wp(u)-e_3),\end{aligned}$$

$$g_2 = 60\sum_{\omega\in\Lambda-\{0\}}\frac{1}{\omega^4},\quad g_3 = 140\sum_{\omega\in\Lambda-\{0\}}\frac{1}{\omega^6},$$

$$e_j = \wp\left(\frac{\omega_j}{2}\right)\quad (\, j = 1,2,3\,)$$

$$(\,\omega_1+\omega_2+\omega_3 = 0\,).$$

$\wp(u)$ が満たす微分方程式

まとめ：$\wp(u)$ が満たす微分方程式

$$\begin{aligned}\wp'(u)^2 &= 4\wp(u)^3 - g_2\wp(u) - g_3\\ &= 4(\wp(u)-e_1)(\wp(u)-e_2)(\wp(u)-e_3),\end{aligned}$$

$$g_2 = 60\sum_{\omega\in\Lambda-\{0\}}\frac{1}{\omega^4},\quad g_3 = 140\sum_{\omega\in\Lambda-\{0\}}\frac{1}{\omega^6},$$

$$e_j = \wp\left(\frac{\omega_j}{2}\right)\quad (\, j = 1,2,3\,)$$

$$(\,\omega_1+\omega_2+\omega_3 = 0\,).$$

$$e_i \neq e_j \quad (\, i \neq j\,).$$

（証明）例えば $e_1 = e_2$ とすると，$\wp(u)-e_1$ は $u \equiv \omega_1/2, \omega_2/2$ に 2 位の零点を持ち，周期平行四辺形内に多重度を込めて 4 個の零点を持つ．

これは，$\wp(u)-e_1$ が 2 位の楕円関数であることに矛盾する． ■

$\wp(u)$ が満たす微分方程式

$$\left(\wp'(u)^2 =\right) 4\wp(u)^3 - g_2\wp(u) - g_3 = 4(\wp(u) - e_1)(\wp(u) - e_2)(\wp(u) - e_3).$$

ここで，$\wp(u)$ は周期平行四辺形内で任意の複素数の値を 2 度とる．

$\because$　任意の複素数定数 c をとると，$\wp(u) - c$ は 2 位の楕円関数なので，周期平行四辺形内に零点を 2 個とる． ∎

したがって，次の多項式の恒等式が成り立つ．

$$4x^3 - g_2x - g_3 = 4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3).$$

根と係数の関係

$$\begin{cases} e_1 + e_2 + e_3 = 0 \\ e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1 = -g_2/4 \\ e_1e_2e_3 = g_3/4 \end{cases}$$

$\wp(u)$ が満たす微分方程式

判別式 (discriminant)

$$\begin{aligned}\Delta &\equiv 16(e_1 - e_2)^2(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2 \\ &= g_2^3 - 27g_3^2.\end{aligned}$$

$e_i \neq e_j$ ($i \neq j$) より， $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0.$

$*$ $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ は保型形式（モジュラー形式）の理論で重要となる．

$$g_2 = 60 \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^4}, \quad g_3 = 140 \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^6}.$$

- Δ は周期格子 Λ の基底 ω_1, ω_2 の関数である．
- ところが，Λ の基底 ω_1, ω_2 のとり方は一意的ではない．
- 基底 ω_1, ω_2 の関数で，基底の交換に対しある種の変換則に従うのものが保型形式である．

まとめ

- 周期 ω_1, ω_2 を先に与えて，それらを周期に持つ楕円関数をつくった．
- Weierstrass の $\wp$ 関数（2 位の楕円関数）．

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{\omega \in \Lambda - \{0\}} \left(\frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right),$$

Λ ：周期格子（基底 ω_1, ω_2）．

- $\wp(u)$ が満たす微分方程式．

$$\wp'(u)^2 = 4\wp(u)^3 - g_2\wp(u) - g_3.$$

- 判別式．

次回の予定．

- Weierstrass の zeta 関数，sigma 関数．
- Weierstrass 楕円関数とテータ関数との関係．
- Weierstrass 楕円関数の数値計算．

補遺：$f(u) = \sum (u-\omega)^{-3}$ が有理型関数であること

$$f(u) \equiv \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(u-\omega)^3}.$$

$f(u)$ は $\mathbb{C}$ で有理型関数である（$u = \omega \in \Lambda$ に 3 位の極を持つ）.

（証明）$R > 0$ を任意に取る．$f(u)$ が $|u| < R$ で有理型関数であり，$u = \omega \in \Lambda$ ($|\omega| < R$) に 3 位の極を持つことを示せばよい．

$$f(u) = \sum_{|\omega|<2R} \frac{1}{(u-\omega)^3} + \sum_{|\omega|\geq 2R} \frac{1}{(u-\omega)^3} =: f_1(u) + f_2(u).$$

$f_1(u)$ は $u = \omega$ に 3 位の極を持つ有理関数であるから，$f_2(u)$ が $|u| < R$ で正則であることを言えばよい．ϵ ($0 < \epsilon < R$) を任意に取れば，$|u| \leq R - \epsilon$ のとき，$|\omega| \geq 2R$ なる ω に対して $|u| < R \leq |\omega|/2$ であるから，

$$\left| \frac{1}{(u-\omega)^3} \right| \leq \frac{1}{(|\omega| - |u|)^3} \leq \frac{1}{(|\omega| - |\omega|/2)^3} = \frac{8}{|\omega|^3}.$$

そして $\sum |\omega|^{-3} < \infty$ であるから，Weierstrass の M-判定法より，$f_2(u)$ は $|u| \leq R - \epsilon$ で絶対かつ一様収束する．したがって，$f_2(u)$ は $|u| < R$ で正則関数である．

補遺：$f(u) = \sum (u-\omega)^{-3}$ が有理型関数であること

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{\omega \neq 0} \left(\frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

$\wp(u)$ は全複素平面 $\mathbb{C}$ で有理型関数であり，$u = \omega \in \Lambda$ に 2 位の極をもつ．

（証明）$R > 0$ を任意に取り，$\wp(u)$ が $|u| < R$ で有理型関数であり，$u = \omega \in \Lambda$ ($|\omega| < R$) に 2 位の極をもつことを言えばよい．

$$\wp(u) = \wp_1(u) + \wp_2(u),$$

$$\wp_1(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{0<|\omega|<2R} \left(\frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right), \quad \wp_2(u) = \sum_{|\omega| \geq 2R} \left(\frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

$\wp_1(u)$ は $u = \omega \in \Lambda$ に 2 位の極をもつ有理関数である．よって，$\wp_2(u)$ が $|u| < R$ で正則であることを言えばよい．
ϵ ($0 < \epsilon < R$) を任意に取る．$|u| \leq R - \epsilon$ とする．
$|\omega| \geq 2R$ ならば $|u| < R \leq |\omega|/2$ なので，

$$\left| \left(\frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \right| = \left| \frac{u(2\omega - u)}{\omega^2 (u-\omega)^2} \right| \leq \frac{|u|(2|\omega| + |u|)}{|\omega|^2 (|\omega| - |u|)^2},$$

補遺：$f(u) = \sum (u-\omega)^{-3}$ が有理型関数であること

$$\left| \left(\frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \right| \leq \frac{R(2|\omega| + |\omega|/2)}{|\omega|^2(|\omega| - |\omega|/2)^2} = \frac{10R}{|\omega|^3} \quad (\,|u| \leq R - \epsilon,\ |\omega| \geq 2R\,),$$

$$\sum_{|\omega| \geq 2R} \frac{10R}{|\omega|^3} \leq 10R \sum_{\omega \neq 0} \frac{1}{|\omega|^3} < \infty.$$

よって，Weierstrass の M-判定法により，

$$\wp_2(u) = \sum_{|\omega| \geq 2R} \left(\frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

は $|u| \leq R - \epsilon$ で絶対かつ一様収束し，$|u| < R$ で正則関数となる．

以上より，$\wp(u)$ は $|u| < R$ で 2 位の極 $u = \omega \in \Lambda$ を除いて正則である． ■

補遺：$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ の導出

$$4x^3 - g_2 x - g_3 = 4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)$$

の両辺を x で微分して $x = e_1, e_2, e_3$ とおいて，

$$\begin{aligned}
4(e_1-e_2)(e_1-e_3) &= 12e_1^2 - g_2, \\
4(e_2-e_1)(e_2-e_3) &= 12e_2^2 - g_2, \\
4(e_3-e_1)(e_3-e_2) &= 12e_3^2 - g_2.
\end{aligned}$$

3 式の積をとって，

$$\begin{aligned}
4\Delta &= 64(e_1-e_2)^2(e_2-e_3)^2(e_3-e_1)^2 \\
&= (g_2 - 12e_1^2)(g_2 - 12e_2^2)(g_2 - 12e_3^2) \\
&= g_2^3 - 12(e_1^2+e_2^2+e_3^2)g_2^2 + 12^2(e_1^2e_2^2+e_2^2e_3^2+e_3^2e_1^2)g_2 - 12^3e_1^2e_2^2e_3^2.
\end{aligned}$$

補遺：$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ の導出

三次方程式の根と係数の関係より，

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = (e_1 + e_2 + e_3)^2 - 2(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1) = \frac{g_2}{2},$$

$$e_1^2e_2^2 + e_2^2e_3^2 + e_3^2e_1^2 = (e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1)^2 - 2e_1e_2e_3(e_1 + e_2 + e_3) = \frac{1}{4^2}g_2^2,$$

$$e_1^2e_2^2e_3^2 = \frac{g_3^2}{4^2},$$

$$\therefore \quad \Delta = g_2^3 - 27g_3^2.$$