楕円関数論 (10)
Weierstrass の楕円関数 (2)

緒方　秀教

電気通信大学　大学院情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻

2020 年 12 月

復習& 今回の目標

前回の復習

- 与えられた ω_1, ω_2 を周期に持つ楕円関数をつくる.
- Weierstrass の $\wp$ 関数（2 位の楕円関数）.

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{\omega \in \Lambda - \{0\}} \left(\frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right),$$

$$\Lambda = \{\, m\omega_1 + n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z} \,\} \quad \text{周期格子}.$$

- $\wp(u)$ が満たす微分方程式.
- 判別式.

復習& 今回の目標

前回の復習

- 与えられた ω_1, ω_2 を周期に持つ楕円関数をつくる.
- Weierstrass の $\wp$ 関数（2 位の楕円関数）.

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{\omega \in \Lambda - \{0\}} \left(\frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right),$$

$$\Lambda = \{\, m\omega_1 + n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z} \,\} \quad \text{周期格子.}$$

- $\wp(u)$ が満たす微分方程式.
- 判別式.

今回の目標

Weierstrass$\wp$ 関数の数値計算.

$\wp(u)$ の数値計算：手がかり

- Jacobi の楕円関数 sn, cn, dn$\cdots$テータ関数（整関数）で数値計算.

$$\vartheta_1(v|\tau) = 2q^{1/4}\sin\pi v \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}v})(1-q^{2n}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}v})$$

$$(\ \mathrm{Im}\,\tau > 0, \quad q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\tau}\ )$$

格子点 $m + n\tau$ $(m, n \in \mathbb{Z})$ に 1 位の零点を持つ.

- Weierstrass 楕円関数の理論でも，格子点 $\omega \in \Lambda$ に零点を持つ整関数をつくってみよう.

  $\to$ Weierstrass の sigma 関数.

Weierstrass の zeta 関数

まず，$\wp(u)$ から，$u = \omega \in \Lambda$ に 1 位の極をもつ有理型関数をつくってみる．

Weierstrass の zeta 関数

まず，$\wp(u)$ から，$u = \omega \in \Lambda$ に 1 位の極をもつ有理型関数をつくってみる．

$$\wp(u) - \frac{1}{u^2} = \sum_{\omega \neq 0} \left(\frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right),$$

両辺を原点 0 から点 u まで積分する（右辺は一様収束ゆえ項別積分可能）．

$$-\int_0^u \left(\wp(u) - \frac{1}{u^2} \right) \mathrm{d}u = \sum_{\omega \neq 0} \left(\frac{1}{u-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{u}{\omega^2} \right),$$

$$\frac{1}{u} - \int_0^u \left(\wp(u) - \frac{1}{u^2} \right) \mathrm{d}u = \frac{1}{u} + \sum_{\omega \neq 0} \left(\frac{1}{u-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{u}{\omega^2} \right),$$

Weierstrass の zeta 関数

まず，$\wp(u)$ から，$u=\omega\in\Lambda$ に 1 位の極をもつ有理型関数をつくってみる．

$$\wp(u)-\frac{1}{u^2}=\sum_{\omega\neq 0}\left(\frac{1}{(u-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right),$$

両辺を原点 0 から点 u まで積分する（右辺は一様収束ゆえ項別積分可能）．

$$-\int_0^u\left(\wp(u)-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u=\sum_{\omega\neq 0}\left(\frac{1}{u-\omega}+\frac{1}{\omega}+\frac{u}{\omega^2}\right),$$

$$\frac{1}{u}-\int_0^u\left(\wp(u)-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u=\frac{1}{u}+\sum_{\omega\neq 0}\left(\frac{1}{u-\omega}+\frac{1}{\omega}+\frac{u}{\omega^2}\right),$$

Weierstrass の zeta 関数

$$\zeta(u)=\frac{1}{u}+\sum_{\omega\in\Lambda-\{0\}}\left(\frac{1}{u-\omega}+\frac{1}{\omega}+\frac{u}{\omega^2}\right).$$

Weierstrass の zeta 関数

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} + \sum_{\omega \in \Lambda - \{0\}} \left(\frac{1}{u-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{u}{\omega^2} \right).$$

- $\zeta(u)$ は $u = \omega \in \Lambda$ に 1 位の極をもつ有理型関数である.
- $\zeta(u)$ は奇関数である.
- $\zeta'(u) = -\wp(u)$.

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{\omega \neq 0} \left(\frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

Weierstrass の zeta 関数

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} + \sum_{\omega \in \Lambda - \{0\}} \left(\frac{1}{u-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{u}{\omega^2} \right).$$

- $\zeta(u)$ はもはや楕円関数ではない.

  $\because$ 　$f(u)$ を楕円関数，P をその周期平行四辺形とすると，偏角の原理と $f'(u)/f(u)$ の周期性より

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{\partial P} \frac{f'(u)}{f(u)} \mathrm{d}u = （P \text{ 内の零点の個数}）-（P \text{ 内の極の個数}）= 0,$$

（P 内の零点の個数）=（P 内の極の個数）=:（楕円関数 $f(u)$ の位数).

留数定理と $f(u)$ の周期性より，

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{\partial P} f(u)\mathrm{d}u = \sum （P \text{ 内の極の留数}）= 0.$$

よって，P 内に留数 $\neq 0$ の 1 位の極が 1 個だけある状況はあり得ない，
i.e., 1 位の楕円関数は存在しない（動画「楕円関数論（４）」参照）.

Weierstrass の zeta 関数：擬周期性

$\zeta(u)$ はもはや楕円関数ではない．

しかし，楕円関数に準ずる性質を持つと期待される．

Weierstrass の zeta 関数：擬周期性

$\zeta(u)$ はもはや楕円関数ではない．

しかし，楕円関数に準ずる性質を持つと期待される．

$$\zeta'(u+\omega_j)-\zeta'(u)=-\wp(u+\omega_j)+\wp(u)=0 \quad (\, j=1,2\,),$$
$$\zeta(u+\omega_j)-\zeta(u)=\mathrm{const}.$$

$u=-\omega_j/2$ とおくと，$\zeta(u)$ は奇関数であるから，

$$\mathrm{const}.=\zeta\left(\frac{\omega_j}{2}\right)-\zeta\left(-\frac{\omega_j}{2}\right)=2\zeta\left(\frac{\omega_j}{2}\right).$$

Weierstrass の zeta 関数：擬周期性

$\zeta(u)$ はもはや楕円関数ではない.

しかし，楕円関数に準ずる性質を持つと期待される.

$$\zeta'(u+\omega_j) - \zeta'(u) = -\wp(u+\omega_j) + \wp(u) = 0 \quad (\, j = 1, 2\,),$$
$$\zeta(u+\omega_j) - \zeta(u) = \mathrm{const.}$$

$u = -\omega_j/2$ とおくと，$\zeta(u)$ は奇関数であるから，

$$\mathrm{const.} = \zeta\left(\frac{\omega_j}{2}\right) - \zeta\left(-\frac{\omega_j}{2}\right) = 2\zeta\left(\frac{\omega_j}{2}\right).$$

zeta 関数の擬周期性

$$\zeta(u+\omega_j) - \zeta(u) = \eta_j, \quad \eta_j = 2\zeta\left(\frac{\omega_j}{2}\right) \quad (\, j = 1, 2\,).$$

Weierstrass の zeta 関数：擬周期性

$$\zeta(u + m\omega_1 + n\omega_2) = \zeta(u) + m\eta_1 + n\eta_2 \quad (\, m, n \in \mathbb{Z}\,).$$

$\omega_3 := -\omega_1 - \omega_2$ に対しては,

$$\zeta(u + \omega_3) = \zeta(u - \omega_1 - \omega_2) = \zeta(u) - \eta_1 - \eta_2,$$
$$\therefore \quad \zeta(u + \omega_3) = \zeta(u) + \eta_3, \quad \eta_3 = -\eta_1 - \eta_2.$$

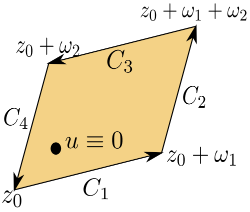
$$\zeta(u + \omega_j) = \zeta(u) + \eta_j, \quad \eta_j = 2\zeta\left(\frac{\omega_j}{2}\right) \quad (\, j = 1, 2, 3\,),$$
$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0, \quad \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0.$$

Weierstrass の zeta 関数：Legendre の関係式

複素積分 $\displaystyle\int_{C_1+C_2+C_3+C_4} \zeta(u)\mathrm{d}u$ を考える（$C_1+\cdots+C_4$：周期平行四辺形）.

$\zeta(u)$ は周期平行四辺形において，
$u \equiv 0 \mod \Lambda$ にのみ極（1 位）を持つ.

$$\mathrm{Res}(\zeta(u), u\equiv 0) = 1.$$



留数定理より，

$$\oint_{C_1+C_2+C_3+C_4} \zeta(u)\mathrm{d}u = 2\pi\mathrm{i}.$$

$$\int_{C_3}\zeta(u)\mathrm{d}u = -\int_{C_1}\zeta(u+\omega_2)\mathrm{d}u = -\int_{C_1}(\zeta(u)+\eta_2)\mathrm{d}u = -\int_{C_2}\zeta(u)\mathrm{d}u - \eta_2\omega_1,$$

同様にして $\displaystyle\int_{C_2}\zeta(u)\mathrm{d}u = -\int_{C_4}\zeta(u)\mathrm{d}u + \eta_1\omega_2.$

Weierstrass の zeta 関数：Legendre の関係式

Legendre の関係式

$$\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = 2\pi\mathrm{i}.$$

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0, \quad \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0$$

を用いて，次の式も示される．

Legendre の関係式

$$\begin{aligned} \eta_2\omega_3 - \eta_3\omega_2 &= 2\pi\mathrm{i}, \\ \eta_3\omega_1 - \eta_1\omega_3 &= 2\pi\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Weierstrass の sigma 関数

いよいよ，格子点 $\omega \in \Lambda$ を零点にもつ整関数をつくる．

$$\zeta(u) - \frac{1}{u} = \sum_{\omega \neq 0} \left(\frac{1}{u-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{u}{\omega^2} \right).$$

両辺を原点 0 から点 u まで積分する（右辺は一様収束ゆえ項別積分可能）．

$$\int_0^u \left(\zeta(u) - \frac{1}{u} \right) \mathrm{d}u = \sum_{\omega \neq 0} \left(\log\left(1 - \frac{u}{\omega}\right) + \frac{u}{\omega} + \frac{u^2}{2\omega^2} \right).$$

Weierstrass の sigma 関数

いよいよ，格子点 $\omega \in \Lambda$ を零点にもつ整関数をつくる．

$$\zeta(u) - \frac{1}{u} = \sum_{\omega \neq 0} \left(\frac{1}{u-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{u}{\omega^2} \right).$$

両辺を原点 0 から点 u まで積分する（右辺は一様収束ゆえ項別積分可能）．

$$\int_0^u \left(\zeta(u) - \frac{1}{u} \right) \mathrm{d}u = \sum_{\omega \neq 0} \left(\log\left(1 - \frac{u}{\omega}\right) + \frac{u}{\omega} + \frac{u^2}{2\omega^2} \right).$$

右辺の exp をとった関数を新たに定義する．

Weierstrass の sigma 関数

$$\sigma(u) \equiv u \prod_{\omega \in \Lambda - \{0\}} \left(1 - \frac{u}{\omega}\right) \exp\left(\frac{u}{\omega} + \frac{u^2}{2\omega^2} \right).$$

Weierstrass の sigma 関数

Weierstrass の sigma 関数

$$\sigma(u) \equiv u \prod_{\omega\in\Lambda-\{0\}} \left(1-\frac{u}{\omega}\right) \exp\left(\frac{u}{\omega}+\frac{u^2}{2\omega^2}\right).$$

- 整関数である.
- 奇関数である.
- $u=\omega\in\Lambda$ に 1 位の零点を持つ.
-
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\log\sigma(u) = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} = \zeta(u).$$
$$\zeta(u) = \frac{1}{u} + \sum_{\omega\neq 0}\left(\frac{1}{u-\omega}+\frac{1}{\omega}+\frac{u}{\omega^2}\right).$$

Weierstrass の sigma 関数：擬周期性

$\sigma(u)$ の擬周期性を調べる．

$$\frac{\sigma'(u+\omega_j)}{\sigma(u+\omega_j)} - \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} = \zeta(u+\omega_j) - \zeta(u) = \eta_j,$$

$$\log\sigma(u+\omega_j) - \log\sigma(u) = \eta_j u + \text{const.}$$

$$\sigma(u+\omega_j) = C_j \exp(\eta_j u)\sigma(u) \quad (\ C_j \ :\ \text{const.},\ j=1,2\ ).$$

定数 C_j を求めるために $u = -\omega_j/2$ を代入すると，
$\sigma(u)$ が奇関数であることに注意して，

$$\sigma\left(\frac{\omega_j}{2}\right) = C_j \exp\left(-\eta_j \frac{\omega_j}{2}\right)\sigma\left(-\frac{\omega_j}{2}\right) = -C_j \exp\left(-\eta_j \frac{\omega_j}{2}\right)\sigma\left(\frac{\omega_j}{2}\right),$$

$$\therefore \quad C_j = -\exp\left(\eta_j \frac{\omega_j}{2}\right).$$

$\sigma(u)$ の擬周期性

$$\sigma\left(u+\omega_j\right) = -\exp\left(\eta_j\left(u+\frac{\omega_j}{2}\right)\right)\sigma(u),$$

$$\eta_j = 2\zeta\left(\frac{\omega_j}{2}\right) \quad (\ j=1,2\ ).$$

Weierstrass の sigma 関数：擬周期性

$$
\begin{aligned}
\sigma(u+2\omega_j) &= \sigma((u+\omega_j)+\omega_j) \\
&= -\exp\left(\eta_j\left(u+\omega_j+\frac{\omega_j}{2}\right)\right)\sigma(u+\omega_j) \\
&= (-1)^2\exp\left(\eta_j\left(u+\omega_j+\frac{\omega_j}{2}\right)\right)\exp\left(\eta_j\left(u+\frac{\omega_j}{2}\right)\right)\sigma(u) \\
&= (-1)^2\exp\left(2\eta_j(u+\omega_j)\right)\sigma(u),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma(u+\omega_1+\omega_2) &= \sigma((u+\omega_1)+\omega_2) \\
&= -\exp\left(\eta_2\left(u+\omega_1+\frac{\omega_2}{2}\right)\right)\sigma(u+\omega_1) \\
&= (-1)^2\exp\left(\eta_2\left(u+\omega_1+\frac{\omega_2}{2}\right)\right)\exp\left(\eta_1\left(u+\frac{\omega_1}{2}\right)\right)\sigma(u) \\
&= (-1)^2\exp\left((\eta_1+\eta_2)u+\frac{1}{2}\eta_1\omega_1+\eta_2\omega_1+\frac{1}{2}\eta_2\omega_2\right) \\
&\qquad \text{（Legendre の関係式 } \eta_1\omega_2-\eta_2\omega_1=2\pi i \text{ を用いて）} \\
&= -(-1)^2\exp\left((\eta_1+\eta_2)\left(u+\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)\right)\right)\sigma(u).
\end{aligned}
$$

このような計算により，

Weierstrass の sigma 関数：擬周期性

sigma 関数の擬周期性

$$
\begin{aligned}
&\sigma(u + m\omega_1 + n\omega_2) \\
&\quad = (-1)^{mn+m+n} \exp\left((m\eta_1 + n\eta_2)\left(u + \frac{1}{2}(m\omega_1 + n\omega_2)\right)\right)\sigma(u), \\
&\qquad\qquad \eta_j = 2\zeta\left(\frac{\omega_j}{2}\right) \quad (\, j = 1, 2;\ m, n \in \mathbb{Z}\,).
\end{aligned}
$$

sigma 関数のテータ関数による表現を求める.
$\rightarrow$ Weierstrass 楕円関数の数値計算が可能に.

次のふたつの関数を比べる.

$$\sigma(u), \quad f(u) = \vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_1}\middle|\tau\right) \quad \left(\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}\right).$$

両者は $u = m\omega_1 + n\omega_2$ ($m, n \in \mathbb{Z}$) に 1 位の零点を持つ.
両者の擬周期性を比べる.

$$\begin{aligned}
\log\sigma(u+\omega_1) &= \log\sigma(u) + \eta_1\left(u + \frac{\omega_1}{2}\right) + \log(-1) \\
&= \log\sigma(u) + \frac{\eta_1}{2\omega_1}\left\{(u+\omega_1)^2 - u^2\right\} + \log(-1), \\
\log f(u+\omega_1) &= \log f(u) + \log(-1),
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \log\sigma(u+\omega_1) - \log f(u+\omega_1) - \frac{\eta_1}{2\omega_1}(u+\omega_1)^2 = \log\sigma(u) - \log f(u) - \frac{\eta_1}{2\omega_1}u^2.$$

sigma 関数のテータ関数による表現

$$\log\sigma(u+\omega_2) = \log\sigma(u) + \eta_2\left(u+\frac{\omega_2}{2}\right) + \log(-1),$$

$$\log f(u+\omega_2) = \log f(u) - \mathrm{i}\frac{\pi\omega_2}{\omega_1} - 2\pi\mathrm{i}\frac{u}{\omega_1} + \log(-1),$$

$$\log\sigma(u+\omega_2) - \log f(u+\omega_2)$$

$$= \log\sigma(u) - \log f(u) + \frac{\eta_2\omega_1 + 2\pi\mathrm{i}}{\omega_1}u + \frac{\omega_2(\eta_2\omega_1 + 2\pi\mathrm{i})}{2\omega_1}$$

（Legendre の関係式 $\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = 2\pi\mathrm{i}$ を用いて）

$$= \log\sigma(u) - \log f(u) + \frac{\eta_1\omega_2}{\omega_1}u + \frac{\eta_1\omega_2^2}{2\omega_1}$$

$$= \log\sigma(u) - \log f(u) + \frac{\eta_1}{2\omega_1}\{(u+\omega_2)^2 - u^2\}.$$

$$\therefore\quad \log\sigma(u+\omega_2) - \log f(u+\omega_2) - \frac{\eta_1}{2\omega_2}(u+\omega_2)^2 = \log\sigma(u) - \log f(u) - \frac{\eta_1}{2\omega_1}u^2.$$

$\log\sigma(u) - \log f(u) - (\eta_1/2\omega_1)u^2$ は二重周期関数（周期 ω_1, ω_2）である.

sigma 関数のテータ関数による表現

$\exp(-(\eta_1/2\omega_1)u^2)\sigma(u)/f(u)$ は楕円関数（周期 ω_1, ω_2）で極を持たないから，定数関数である．

$$\sigma(u) = C\exp\left(-\frac{\eta_1}{2\omega_1}u^2\right)\vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_1}\middle|\tau\right) \quad (\,C\ :\ \text{const.}\,).$$

定数 C を求めるため，両辺を u で微分して $u = 0$ とおくと，
$C = \omega_1/\vartheta_1'(= \omega_1/\vartheta_1'(0|\tau)\,)$ を得る．

$$\sigma(u) = \frac{\omega_1}{\vartheta_1'}\exp\left(\frac{\eta_1}{2\omega_1}u^2\right)\vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_1}\middle|\tau\right) \quad \left(\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}\right).$$

まだ，$\eta_1 = 2\zeta\left(\frac{\omega_1}{2}\right)$ を求める作業が残っている．

sigma 関数のテータ関数による表現

$\eta_1 = 2\zeta\left(\frac{\omega_1}{2}\right)$ を求めるために，$\zeta(u) = \sigma'(u)/\sigma(u)$ の $u=0$ における Laurent 級数展開を二通りの方法で表す.

1. $\zeta(u)$ の定義式から.

$$\begin{aligned}\zeta(u) &= \frac{1}{u} + \sum_{\omega\neq 0}\left(\frac{1}{u-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{u}{\omega^2}\right)\\ &= \frac{1}{u} + \sum_{\omega\neq 0}\left\{-\frac{1}{\omega}\left(1-\frac{u}{\omega}\right)^{-1} + \frac{1}{\omega} + \frac{u}{\omega^2}\right\}\\ &= \frac{1}{u} + \sum_{\omega\neq 0}\left\{-\frac{1}{\omega}\left(1+\frac{u}{\omega}+\frac{u^2}{\omega^2}+\cdots\right) + \frac{1}{\omega} + \frac{u}{\omega^2}\right\},\end{aligned}$$

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} - G_4 u^3 - G_6 u^5 - \cdots, \quad G_{2k} = \sum_{\omega\neq 0}\frac{1}{\omega^{2k}} \quad (k = 2, 3, \ldots).$$

（注意）

- $\sum_{\omega\neq 0}\omega^{-s} = 0$ （s：奇数）.
- $\zeta(u)$ の $u=0$ における Laurent 級数の u の係数はゼロである.

② $\sigma(u)$ のテータ関数 ϑ_1 による表式から $\zeta(u)$ の Laurent 級数を求める．

$$\log\sigma(u) = \frac{\eta_1}{2\omega_1}u^2 + \log\theta_1\left(\frac{u}{\omega_1}\middle|\tau\right) + \text{const.} \qquad \left(\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}\right).$$

$$\theta_1\left(\frac{u}{\omega_1}\middle|\tau\right) = 2q^{1/4}\sin\frac{\pi u}{\omega_1}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})\left(1-2q^{2n}\cos\frac{2\pi u}{\omega_1}+q^{4n}\right) \quad (\,q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\tau}\,)$$

を代入して，u について微分して，少々長い計算（「補遺」参照）により次を得る．

$$\begin{aligned}
\zeta(u) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\log\sigma(u) \\
&= \frac{1}{u} + \left\{\frac{\eta_1}{\omega_1} - \frac{2\zeta_2}{\omega_1^2} + 2\left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}}\right\}u \\
&\quad - \left\{\frac{2\zeta_4}{\omega_1^4} + \frac{2}{3!}\left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right)^4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3q^{2n}}{1-q^{2n}}\right\}u^3 \\
&\quad - \left\{\frac{2\zeta_6}{\omega_1^6} - \frac{2}{5!}\left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right)^6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5q^{2n}}{1-q^{2n}}\right\}u^5 + \cdots \qquad \left(\zeta_k = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}\right).
\end{aligned}$$

sigma 関数のテータ関数による表現

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} - G_4 u^3 - G_6 u^5 - \cdots \qquad \left(G_{2k} = \sum_{\omega \neq 0} \frac{1}{\omega^{2k}} \right)$$

$$= \frac{1}{u} + \left\{ \frac{\eta_1}{\omega_1} - \frac{2\zeta_2}{\omega_1^2} + 2\left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}} \right\} u$$

$$- \left\{ \frac{2\zeta_4}{\omega_1^4} + \frac{2}{3!}\left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right)^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 q^{2n}}{1-q^{2n}} \right\} u^3$$

$$- \left\{ \frac{2\zeta_6}{\omega_1^6} - \frac{2}{5!}\left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right)^6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 q^{2n}}{1-q^{2n}} \right\} u^5 + \cdots$$

係数比較をする.

u の係数 $(=0) \to \eta_1$, u^3 の係数 $\to g_2 = 60G_4$, u^5 の係数 $\to g_3 = 140G_6$.

（注意） $\zeta_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta_4 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$, $\zeta_6 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$.

sigma 関数のテータ関数による表現

$$\eta_1 = \frac{\pi^2}{3\omega_1}\left(1 - 24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}}\right),$$

$$g_2 = \frac{4}{3}\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^4\left(1 + 240\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3q^{2n}}{1-q^{2n}}\right),$$

$$g_3 = \frac{8}{27}\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^6\left(1 - 504\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5q^{2n}}{1-q^{2n}}\right),$$

$$\text{where}\quad q = \exp\left(\mathrm{i}\pi\frac{\omega_2}{\omega_1}\right).$$

上から η_1 を求めて，

$$\sigma(u) = \frac{\omega_1}{\vartheta_1'}\exp\left(\frac{\eta_1}{2\omega_1}u^2\right)\vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_1}\middle|\tau\right)\quad\left(\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}\right).$$

Weierstrass 楕円関数の数値計算

$\sigma(u)$ が計算できれば，$\zeta(u) = \{\log\sigma(u)\}'$, $\wp(u) = -\zeta'(u)$ も計算できる．

Weierstrass 楕円関数の計算式

$$\zeta(u) = \frac{\eta_1}{\omega_1}u + \frac{1}{\omega_1}\frac{\vartheta_1'(u/\omega_1|\tau)}{\vartheta_1(u/\omega_1|\tau)},$$

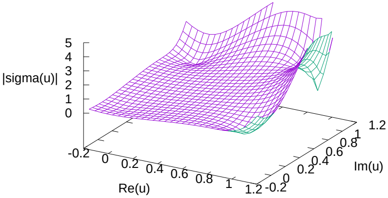
$$\wp(u) = -\frac{\eta_1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_1^2}\left\{\frac{\vartheta_1'(u/\omega_1|\tau)^2}{\vartheta_1(u/\omega_1|\tau)^2} - \frac{\vartheta_1''(u/\omega_1|\tau)}{\vartheta_1(u/\omega_1|\tau)}\right\}$$

$$\left(\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}\right).$$

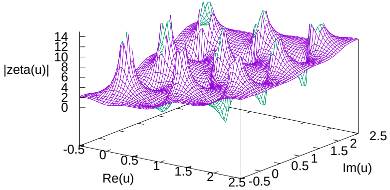
これで，Weierstrass 楕円関数の数値計算ができる．

Weierstrass 楕円関数のグラフ

$\omega_1 = 1, \omega_2 = \mathrm{i}$ に対する Weierstrass 楕円関数.



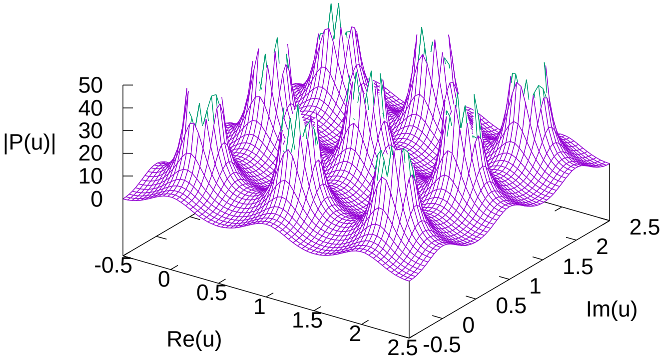
$|\sigma(u)|$ のグラフ.



$|\zeta(u)|$ のグラフ.

Weierstrass 楕円関数のグラフ

$\omega_1 = 1, \omega_2 = \mathrm{i}$ に対する Weierstrass 楕円関数.



$|\wp(u)|$ のグラフ.

まとめ

- Weierstrass 楕円関数の数値計算がしたい.
  $\to$ 格子点 $\omega \in \Lambda$ を零点にもつ整関数.
- zeta 関数 $\zeta(u)$（Legendre の関係式）.
- sigma 関数 $\sigma(u)\cdots$これが求める整関数.
- $\sigma(u)$ のテータ関数による表現.
  $\to$ Weierstrass 楕円関数の数値計算.

補遺：$\zeta(u)$ の Laurent 級数展開

$\sigma(u)$ のテータ関数 ϑ_1 による表式から $\zeta(u)$ の Laurent 級数を求める.

$$
\begin{aligned}
\log\sigma(u) &= \frac{\eta_1}{2\omega_1}u^2 + \log\theta_1\left(\frac{u}{\omega_1}\middle|\tau\right) + \text{const.} \\
&= \frac{\eta_1}{2\omega_1}u^2 + \log\sin\left(\frac{\pi u}{\omega_1}\right) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\log(1 - q^{2n}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}u/\omega_1}) + \sum_{n=1}^{\infty}\log(1 - q^{2n}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}u/\omega_1}), \\
\zeta(u) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\log\sigma(u) \\
&= \frac{\eta_1}{\omega_1}u + \frac{\pi}{\omega_1}\cot\left(\frac{\pi u}{\omega_1}\right) - \frac{2\pi\mathrm{i}}{\omega_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}u/\omega_1}}{1 - q^{2n}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}u/\omega_1}} \\
&\quad + \frac{2\pi\mathrm{i}}{\omega_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}u/\omega_1}}{1 - q^{2n}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}u/\omega_1}}.
\end{aligned}
$$

青字は等比級数の和の形である $\sum_{m=1}^{\infty}\alpha^m = \alpha/(1-\alpha)$ ($|\alpha| < 1$).

補遺：$\zeta(u)$ の Laurent 級数展開

$$\zeta(u) = \frac{\eta_1}{\omega_1}u + \frac{\pi}{\omega_1}\cot\left(\frac{\pi u}{\omega_1}\right) - \frac{2\pi\mathrm{i}}{\omega_1}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(q^{2n}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}u/\omega_1})^m$$

$$+ \frac{2\pi\mathrm{i}}{\omega_1}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(q^{2n}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}u/\omega_1})^m$$

（二重級数の和の順序を交換して）

$$= \frac{\eta_1}{\omega_1}u + \frac{\pi}{\omega_1}\cot\left(\frac{\pi u}{\omega_1}\right)$$

$$- \frac{2\pi\mathrm{i}}{\omega_1}\sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{e}^{2m\pi\mathrm{i}u/\omega_1}\sum_{n=1}^{\infty}q^{2mn} + \frac{2\pi\mathrm{i}}{\omega_1}\sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-2m\pi\mathrm{i}u/\omega_1}\sum_{n=1}^{\infty}q^{2mn},$$

$$\zeta(u) = \frac{\eta_1}{\omega_1}u + \frac{\pi}{\omega_1}\cot\left(\frac{\pi u}{\omega_1}\right) + \frac{4\pi}{\omega_1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^{2m}}{1-q^{2m}}\sin\left(\frac{2m\pi}{\omega_1}u\right).$$

$\cot, \sin$ の項を u の Laurent 級数で表す.

補遺：$\zeta(u)$ の Laurent 級数展開

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots,$$

$$\pi\cot\pi z = \frac{1}{z} - 2\zeta_2 z - 2\zeta_4 z^3 - 2\zeta_6 z^4 - \cdots,$$

$$\zeta_s = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} \quad (\, s > 1\,)$$

を用いて，結局次の $\zeta(u)$ の表式を得る．

$$\begin{aligned}\zeta(u) = \frac{1}{u} &+ \left\{\frac{\eta_1}{\omega_1} - \frac{2\zeta_2}{\omega_1^2} + 2\left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}}\right\}u \\ &- \left\{\frac{2\zeta_4}{\omega_1^4} + \frac{2}{3!}\left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right)^4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3q^{2n}}{1-q^{2n}}\right\}u^3 \\ &- \left\{\frac{2\zeta_6}{\omega_1^6} - \frac{2}{5!}\left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right)^6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5q^{2n}}{1-q^{2n}}\right\}u^5 + \cdots\end{aligned}$$