楕円関数論番外編 (2)
関数列の一様収束

緒方　秀教

電気通信大学　大学院情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻

2020 年 12 月 9 日（水）

無限和／無限積で定義された複素関数

楕円関数論では，無限和／無限積で定義された複素関数がたくさん現れる．

- Weierstrass の $\wp$（ペー）関数

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{\omega \in \Lambda - \{0\}} \left\{ \frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right\},$$

$$\Lambda = \{ m\omega_1 + n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z} \}.$$

- テータ関数

$$\vartheta_1(v|\tau) = 2q^{1/4} \sin \pi v \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 - 2q^{2n} \cos 2\pi v + q^{4n}), \quad \text{etc.}$$

$$\operatorname{Im} \tau > 0, \quad q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\tau}.$$

これらの無限和／無限積で定義される複素関数の正則性を，どうやって判定するのだろうか？

無限和／無限積で定義された複素関数

無限和／無限積で与えられた複素関数の正則性をどうやって調べるか？

無限和／無限積で定義された複素関数

無限和／無限積で与えられた複素関数の正則性をどうやって調べるか？

1. 正則関数列の（広義）一様収束極限は正則関数である.
2. **Weierstrass の M-判定法.**

関数列の一様収束（v.s. 各点収束）

まず，**一様収束**とは何か？

まず，一様収束とは何か？

定義：関数列の一様収束

- $\{f_n(z)\}$: 集合 $A(\subset \mathbb{C})$ 上の関数列，
- $f(z)$: A 上の関数.

$$f_n(z) \text{ は } A \text{ 上 } f(z) \text{ に一様収束する.}$$
$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \text{任意の } \epsilon > 0 \text{ に対しある整数 } N \text{ が存在し,}$$
$$|f_n(z) - f(z)| \leq \epsilon \quad (\forall z \in A, \forall n \geq N).$$

N が個々の $z \in A$ に依らないことに注意.

関数列の一様収束（v.s. 各点収束）

まず，**一様収束**とは何か？

定義：関数列の一様収束

- $\{f_n(z)\}$：集合 $A(\subset \mathbb{C}\,)$ 上の関数列,
- $f(z)$：A 上の関数.

$$f_n(z) \text{ は } A \text{ 上 } f(z) \text{ に一様収束する.}$$

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \text{任意の } \epsilon > 0 \text{ に対しある整数 } N \text{ が存在し,}$$

$$|f_n(z) - f(z)| \leq \epsilon \quad (\,\forall z \in A,\ \forall n \geq N\,).$$

N が個々の $z \in A$ に依らないことに注意.

各点収束：一様とは限らない関数列の収束

$$\text{任意の } \epsilon > 0,\ \text{任意の } z \in A \text{ に対しある整数 } N(z) \text{ が存在し,}$$

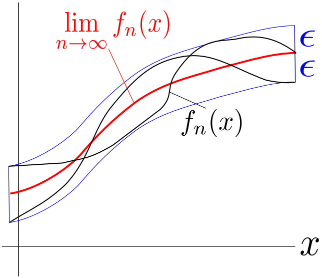
$$|f_n(z) - f(z)| \leq \epsilon \quad (\,\forall n \geq N(z)\,).$$

一様収束のイメージ

$$f_n(z) \to f(z) \quad （A\ 上一様収束）$$

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の $\epsilon > 0$ に対しある整数 N が存在し，

$$|f_n(z) - f(z)| \leq \epsilon \quad (\forall z \in A,\ \forall n \geq N).$$

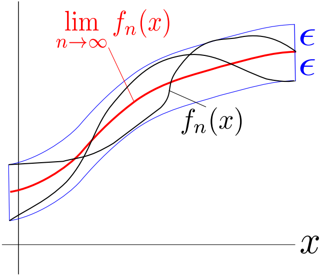


一様収束のイメージ

$$f_n(z) \to f(z) \quad (A\text{ 上一様収束})$$

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の $\epsilon > 0$ に対しある整数 N が存在し,

$$|f_n(z) - f(z)| \leq \epsilon \quad (\forall z \in A,\ \forall n \geq N).$$



一様収束 $f_n(z) \to f(z)$ とは

n を十分大きく取れば, $f_n(z)$ は $f(z)$ を誤差 $\pm\epsilon$ で一様に近似する.

関数列の一様収束

関数列が「一様収束」すると何が嬉しいか？

1. 連続関数列の一様収束極限は連続関数である．
2. 関数列が一様収束すれば，積分と極限操作の順序交換ができる．

$$\lim_{n\to\infty}\int_C f_n(z)\mathrm{d}z = \int_C \lim_{n\to\infty} f_n(z)\mathrm{d}z.$$

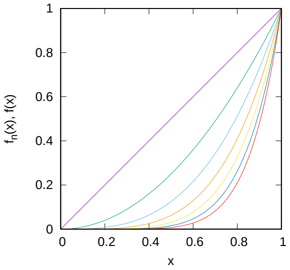
関数列が「一様」収束しないと⋯

1. 各 $f_n(z)$ は連続関数でも $\lim f_n(z)$ は連続関数でないことがある.

例　区間 $[0,1]$ 上の連続関数列

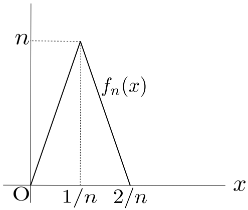
$$f_n(x) = x^n \quad (\, 0 \le x \le 1;\ n = 1, 2, \ldots\,),$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & (\, 0 \le x < 1\,) \\ 1 & (\, x = 1\,) \end{cases}$$ 連続関数でない.



2. 積分と極限の順序交換ができないことがある.

$$\text{例}\quad f_n(x) = \begin{cases} n^2x & (\,0 \le x \le 1/n\,) \\ -n^2x + 2n & (\,1/n < x \le 2/n\,) \\ 0 & (\,2/n < x \le 2\,) \end{cases} \quad (\,n = 1, 2, \ldots\,).$$



$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad (\,0 \le x \le 2\,).$$

$$\int_0^2 f_n(x)\mathrm{d}x = 1 \quad (\,n = 0, 1, 2, \ldots\,),$$

$$\int_0^2 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = 0 \ne 1 = \lim_{n\to\infty}\int_0^2 f_n(x)\mathrm{d}x.$$

一様収束：連続関数の極限は連続関数

定理：連続関数列の一様収束極限は連続関数

- $f_n(z)$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) : $A(\subset \mathbb{C})$ 上の連続関数.
- $f_n(z) \to f(z)$ （A 上一様収束）

$f(z)$ は A 上の連続関数である.

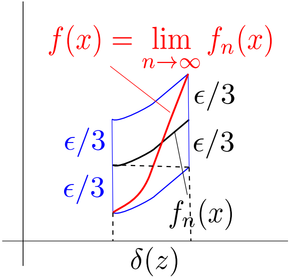
（証明）$\epsilon > 0$ を任意に取る.

n を十分大きく取れば，A 上 $f_n(z)$ は $f(z)$ を誤差 $\pm\epsilon/3$ で一様に近似するから，

$$|f(z) - f_n(z)| \leq \epsilon/3 \quad (\forall z \in A).$$

$f_n(z)$ は連続関数だから，各 $z \in A$ に対し $\delta(z) > 0$ が存在して，

$$z' \in A,\ |z' - z| \leq \delta(z) \Rightarrow |f_n(z) - f_n(z')| \leq \epsilon/3.$$



ゆえに，各 $z \in A$ に対し，$z' \in A$, $|z - z'| < \delta(z)$ ならば，

$$|f(z) - f(z')| \leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z')| + |f_n(z') - f(z')| \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

一様収束：積分と極限の順序交換可能

定理：一様収束なら積分と極限は交換可能

- $C(\subset \mathbb{C})$：有限長の積分路.
- $f_n(z)\ (n = 0, 1, 2, \ldots)$：$C$ 上の連続関数列.
- $f_n(z) \to f(z)$：C 上一様収束.

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C \lim_{n\to\infty} f_n(z)\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty}\int_C f_n(z)\mathrm{d}z.$$

（証明）$\epsilon > 0$ を任意に取る．n を十分大きく取れば，C 上 $f_n(z)$ は $f(z)$ を誤差 $\pm\epsilon/L$ （L は C の長さ）で一様に近似するから，

$$|f_n(z) - f(z)| \leq \frac{\epsilon}{L} \quad (\forall z \in C).$$

$$\begin{aligned}\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z - \int_C f_n(z)\mathrm{d}z\right| &\leq \int_C |f(z) - f_n(z)||\mathrm{d}z| \\ &\leq \frac{\epsilon}{L}\int_C |\mathrm{d}z| = \frac{\epsilon}{L}\cdot L = \epsilon.\end{aligned}$$

■

正則関数列の広義一様収束極限は正則関数

複素関数論に話を戻す.

正則関数列の極限はどういう時に正則関数になるのか？

正則関数列は，広義一様収束するとき，その極限関数が正則関数となる.

定義：広義一様収束

- $\{f_n(z)\}$: $A(\subset \mathbb{C})$ 上の関数列.
- $f(z)$: A 上の関数.

$$f_n(z) \to f(z) \quad A \text{ 上広義一様収束}$$

$$\overset{\text{def}}{\iff} \quad A \text{ に含まれる任意の有界閉集合 } K \text{ 上で}$$

$$f_n(z) \to f(z) \quad \text{（一様収束）.}$$

各 $K \subset A$ ごとに収束の一様さが違う.

正則関数列の広義一様収束極限は正則関数

定理：正則関数列の広義一様収束極限は正則関数

- $\{f_n(z)\}$：領域 $D(\subset \mathbb{C})$ 上の正則関数列.
- $f(z)$：D 上の複素関数.
- $f_n(z) \to f(z)$：D 上広義一様収束.

このとき，$f(z)$ は D 上の正則関数である.

（証明）C を任意の単純閉曲線でその内部も含めて D に含まれるものとする.
各 $f_n(z)$ は D で正則関数であるから，Cauchy の積分定理より

$$\oint_C f_n(z)\mathrm{d}z = 0.$$

$n \to \infty$ とすると，$f_n(z) \to f(z)$ （D 上広義一様収束）であるから，
$f(z)$ は D 上連続関数であり，そして，$f_n(z) \to f(z)$ （C 上一様収束）より

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty} \int_C f_n(z)\mathrm{d}z = 0.$$

したがって，Morera の定理（「補遺」参照）より $f(z)$ は D 上正則関数である. ■

まとめ

- 無限和／無限積で定義された複素関数の正則性をどうやって判定するか？
  - 正則関数列の広義一様収束極限は正則関数である．
  - Weierstrass の M-判定法（→これは次回）．
- 一様収束列の定義とその性質
  - 連続関数の一様収束極限は連続関数である．
  - 関数列が一様収束すれば，積分と極限の順序交換が可能．
- 正則関数列の広義一様収束極限は正則関数である．

次回の「番外編」は，Weierstrass の M-判定法からはじめます．

（補遺）Morera の定理

Morera（モレラ）の定理

- $f(z)$: 領域 $D(\subset \mathbb{C})$ 上の連続関数.
- 任意の単純閉曲線 C でその内部も含めて D に含まれるものに対し,

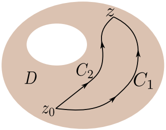
$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

このとき，$f(z)$ は D で正則である.

（証明）点 $z_0 \in D$ を任意に取り固定する．任意の $z \in D$ に対し，積分

$$F(z) \equiv \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

は 2 点 z, z_0 を結ぶ途中経路によらず，$z \in D$ の関数となる．実際，右上図において



$$\int_{C_1} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta - \int_{C_2} f(\zeta)\zeta = \oint_{C_1+(-C_2)} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = 0.$$

そして，$F'(z) = f(z)$ である（$F(z)$ は微分可能である）から正則関数である．

$f(z)$ は正則関数の導関数であるから，正則関数である．