楕円関数論番外編 (3)
無限和で定義される複素関数の正則性

緒方　秀教

電気通信大学　大学院情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻

2020 年 12 月 10 日（木）

復習

楕円関数論には無限和／無限積で定義された複素関数が多数現れる.
これらの正則性をどうやって判定するのか？

- 関数列の**一様収束**.

  $f(z) = \lim f_n(z)$ に対し n を十分大きく取れば,
  $f_n(z)$ は $f(z)$ を誤差 $\pm\epsilon$ で一様に近似する.
- 一様収束する関数列の性質.
- 正則関数列が広義一様収束すれば，極限関数も正則である.

復習

楕円関数論には無限和／無限積で定義された複素関数が
多数現れる.
これらの正則性をどうやって判定するのか？

- 関数列の**一様収束**.

  $f(z) = \lim f_n(z)$ に対し n を十分大きく取れば,
  $f_n(z)$ は $f(z)$ を誤差 $\pm\epsilon$ で一様に近似する.
- 一様収束する関数列の性質.
- 正則関数列が広義一様収束すれば，極限関数も正則である.

今回の内容

Weierstrass の M-判定法

- 無限和 $\sum f_n(z)$ で与えられた関数の一様収束判定.
- 複素関数 $\sum f_n(z)$ が広義一様収束すれば正則関数である.

無限和で表される関数の一様収束判定法

無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ で表される関数の一様収束判定法.

Weierstrass の M-判定法

- $\{f_n(z)\}$: 集合 $A(\subset \mathbb{C})$ 上の関数列.
- $\sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty$: 収束する正項級数.
- $|f_n(z)| \leq M_n \ (\forall z \in A,\ n = 0, 1, 2, \ldots)$.

このとき $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ は A 上絶対かつ一様収束.

$*$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は絶対収束する. $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ は収束する.

$\sum a_n$ が絶対収束するなら，無限級数 $\sum a_n$ 自身も収束する

Weierstrass の M-判定法の証明

（証明）

$$s_n(z) \equiv f_0(z) + \cdots + f_n(z), \quad S_n = M_0 + \cdots + M_n.$$

$\{S_n\}$ は収束列であるから Cauchy 列である，すなわち，

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad |S_n - S_m| = M_{m+1} + \cdots + M_n \leq \epsilon \quad (\,\forall n > \forall m \geq N\,).$$

仮定 $|f_n(z)| \leq M_n$ ($z \in A,\ n = 0, 1, 2, \ldots$) より，

$$|s_n(z) - s_m(z)| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(z) \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(z)| \leq \epsilon$$

$$(\,\forall z \in A,\ \forall n > \forall m \geq N\,). \quad (1)$$

$z \in A$ を固定すると，(1) より $\{s_n(z)\}$ が Cauchy 列であるから，
$\mathbb{C}$ の完備性より極限 $s(z) = \lim_{n\to\infty} s_n(z)$ が存在する．(1) で $n \to \infty$ として

$$|s(z) - s_m(z)| \leq \epsilon \quad (\,\forall z \in A,\ \forall m \geq N\,).$$

これは，$s_n(z) \to s(z)$ （A 上一様収束）に他ならない．■

実数の完備性

- Cauchy 列：$|a_m - a_n| \to 0$ ($m, n \to \infty$) となる数列 $\{a_n\}$.
- 収束列 $\{a_n\}$ は Cauchy 列である.

  $\because$ $a = \lim a_n$ とすると,

$$|a_m - a_n| \le |a_m - a| + |a - a_n| \to 0 \quad (\, m, n \to \infty \,).$$

- 逆に,

実数の完備性

実数列 $\{a_n\}$ が Cauchy 列なら収束する.

- 同様に，複素数の集合 $\mathbb{C}$ も完備である.
- 有理数の集合 $\mathbb{Q}$ は完備でない.

  $\because$ 有理数列 $\{a_n = (1 + 1/n)^n\}$ を考えよ.
  $\{a_n\}$ は $\mathbb{Q}$ の Cauchy 列だが $\lim a_n = \mathrm{e} \notin \mathbb{Q}$ より
  $\mathbb{Q}$ で収束しない.

実数の完備性（使用例）

定義：絶対収束

$$\text{実数（複素数）項級数} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ は絶対収束する.}$$

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \text{ は収束する.}$$

実数の完備性（使用例）

定義：絶対収束

$$\text{実数（複素数）項級数} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ は絶対収束する．}$$

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \text{ は収束する．}$$

$\sum a_n$ が絶対収束するなら，その級数自体も収束する：

（証明）$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_n$, $\quad T_n = \sum_{k=0}^{n} |a_n|$ とおくと，$\{T_n\}$ は収束するから Cauchy 列である．

$$|S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_n \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_n| = |T_n - T_m| \to 0 \quad (\, m, n \to \infty \,)$$

より $\{S_n\}$ は Cauchy 列であり，実数の完備性より $\{S_n\}$ は収束する．■

無限和で表される関数の正則性判定

$f_n(z)$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) : 領域 $D(\subset \mathbb{C})$ 上の正則関数列.

$\sum f_n(z)$ が D 上の正則関数であることの証明法

1. D に含まれる有界閉集合 K を任意に取る.
2. 収束する級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ ($M_n \geq 0$) で次を満たすものを見つける.
$$|f_n(z)| \leq M_n \quad (\forall z \in K,\ n = 0, 1, 2, \ldots).$$
3. Weierstrass の M-判定法により,
$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ は K 上絶対かつ一様収束する.
4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ は D 上で広義一様収束し, D 上の正則関数となる.

Weierstrass の M-判定法：練習問題

$$F(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right)$$

は全複素平面 $\mathbb{C}$ で $z = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ を除いて正則である．

（証明）定数 $R > 0$ を任意に取る．$F(z)$ が $|z| < R$ で $z = n$ ($|n| < R$) を除いて正則であることを言えばよい． $F(z)$ の無限和を次のように分割する．

$$F(z) = F_1(z) + F_2(z),$$

$$F_1(z) = \frac{1}{z} + \sum_{|n|<2R, n \neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right), \quad F_2(z) = \sum_{|n| \geq 2R} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right).$$

$F_1(z)$ は $|z| < R$ において極 $z = n$ ($|n| < R$) を除いて正則な有理関数である（$F_1(z)$ は有限和であることに注意）．

だから，$F_2(z)$ が $|z| < R$ で正則であることを示せばよい．そのために，$F_2(z)$ の無限和が $|z| < R$ で広義一様収束することを示す．

Weierstrass の M-判定法：練習問題（続）

ϵ ($0 < \epsilon < R$) を任意に取り $|z| \le R - \epsilon$ とする．
$|n| \ge 2R$ ならば $|z| < R \le |n|/2$ であるから，

$$\left|\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right)\right| = \left|\frac{z}{n(z-n)}\right| \le \frac{|z|}{|n|(|n|-|z|)}$$
$$\le \frac{R}{|n|(|n|-|n|/2)} = \frac{2R}{|n|^2}.$$

$$\left|\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right)\right| \le \frac{2R}{|n|^2} \quad (|z| \le R - \epsilon,\ |n| \ge 2R). \tag{2}$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty$ より

$$\sum_{|n| \ge 2R} \frac{2R}{|n|^2} < \infty \tag{3}$$

である．(2), (3) から，Weierstrass の M-判定法より，

$$F_2(z) = \sum_{|n| \ge 2R} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right)$$

の右辺は $|z| \le R - \epsilon$ で絶対かつ一様収束する．

$|z| < R$ に含まれる任意の有界閉集合 K は $|z| \leq R - \epsilon$ の形の集合に含まれるから，K においても絶対かつ一様収束となる．したがって，$F_2(z)$ は $|z| < R$ で広義一様収束して正則関数を与える．

■

Weierstrass の M-判定法：練習問題（続）

$|z| < R$ に含まれる任意の有界閉集合 K は $|z| \leq R - \epsilon$ の形の集合に含まれるから，K においても絶対かつ一様収束となる．したがって，$F_2(z)$ は $|z| < R$ で広義一様収束して正則関数を与える．

■

（注意）実は，$F(z) = \pi \cot \pi z$ である．

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right).$$

まとめ

- Weierstrass の M-判定法.
  - 関数項級数の一様収束判定.
  - 無限和で与えられた複素関数の正則性判定.
- 実数の完備性.

  実数（複素数）の Cauchy 列は収束する.

次回は無限積で与えられた複素関数の正則性判定について話します.

（次回で，無限和／無限積で与えられた複素関数の正則性判定の話は終了予定です）