楕円関数論番外編 (4)
無限乗積で与えられる複素関数

緒方　秀教

電気通信大学　大学院情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻

2020 年 12 月 30 日（水）

今回の目的

テータ関数は無限乗積で表される複素関数である.

$$\vartheta_3(v|\tau) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - q^{2n})(1 + 2q^{2n-1}\cos 2\pi v + q^{4n-2})$$

$$(\,\mathrm{Im}\,\tau > 0,\ q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi v}\,), \quad \text{etc.}$$

したがって，テータ関数の正則性を確かめるには，無限乗積および無限乗積で表される複素関数の性質について知っておかなければならない.

本動画では，こうした知識を復習する.

最後に，テータ関数の無限積表示が正則関数を与えることを示す.

無限乗積の基本事項

無限乗積の定義

無限乗積 $\displaystyle\prod_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束する.

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して,

1. $a_n \neq 0$ ($\forall n \geq N$).
2. $\displaystyle\lim_{m\to\infty} \prod_{n=N}^{m} a_m$ が存在して 0 でない.

このとき,

$$\prod_{n=0}^{\infty} a_n := \prod_{n=0}^{N-1} a_n \times \lim_{m\to\infty} \prod_{n=N}^{m} a_m.$$

ある $a_n = 0$ ならば他の a_n がどんな数であっても $\prod a_n = 0$ となり収束するという状況を排除したい.

無限乗積の基本事項

- $\displaystyle\prod_{n=0}^{\infty} a_n$ は発散する. $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\displaystyle\prod_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束しない.
- $\displaystyle\prod_{n=0}^{\infty} a_n$ は 0 に発散する

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $a_n \neq 0\ (\forall n \geq N)$ なる N はあるが, $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\prod_{n=N}^{m} a_n = 0.$

（例）$\displaystyle\prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ は発散する.

$$\because \quad \prod_{n=0}^{m} \frac{1}{2^n} = 2^{-m(m+1)/2} \to 0 \quad (\, m \to \infty\,).$$

無限乗積の基本事項

無限乗積 $\prod_{n=0}^{\infty} a_n$ が存在するなら，$P_m = \prod_{n=0}^{m} a_n$ とおくと，

$$a_m = \frac{P_m}{P_{m-1}} \to 1 \quad (\, m \to \infty\,).$$

よって，$a_n = 1 + u_n$ とおいて，これから次の形の無限乗積を考える．

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1+u_n).$$

- 無限乗積 $\prod_{n=0}^{\infty}(1+u_n)$ は絶対収束する．

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \prod_{n=0}^{\infty}(1+|u_n|) \text{ は収束する．}$$

無限乗積の収束

無限乗積の収束のイメージ.

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1+u_n) = \exp\left(\sum_{n=0}^{\infty}\log(1+u_n)\right), \quad \log(1+u_n) = u_n - \frac{u_n^2}{2} + \cdots,$$

から大雑把に次が成り立ちそう.

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1+u_n) \text{ が収束} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} u_n \text{ が収束.}$$

正確には次の定理が成り立つ.

無限乗積の収束

定理 1

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}|u_n|$ が収束. $\iff$ $\displaystyle\prod_{n=0}^{\infty}(1+|u_n|)$ が収束.
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}|u_n|$ が収束. $\Longrightarrow$ $\displaystyle\prod_{n=0}^{\infty}(1+u_n)$ が収束.

上の定理より，無限級数と同様に次が成り立つ.

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1+u_n)\ \text{が絶対収束.} \quad \Longrightarrow \quad \prod_{n=0}^{\infty}(1+u_n)\ \text{自身が収束.}$$

無限乗積の収束

（第 1 項の証明） $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{\log(1+z)}{z} = 1$ より，

$$\frac{1}{2}|z| \le |\log(1+z)| \le 2|z| \quad (\ |z|\ :\ \text{十分小}\ ).$$

$(\Longrightarrow)$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}|u_n| < \infty$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}|u_n| = 0$ であるから，ある N が存在して

$$\log(1+|u_n|) \le 2|u_n| \quad (\ \forall n \ge N\ ),$$

$$\sum_{n=N}^{\infty}\log(1+|u_n|) \le 2\sum_{n=N}^{\infty}|u_n| < \infty,$$

$$\prod_{n=N}^{\infty}(1+|u_n|) = \exp\left(\sum_{n=N}^{\infty}\log(1+|u_n|)\right) < \infty.$$

$(\ \Longleftarrow\ )$ ある N に対し $\displaystyle\prod_{n=N}^{\infty}(1+|u_n|)$ は収束する．

$$\sum_{n=N}^{\infty}|u_n| \le 2\sum_{n=N}^{\infty}\log(1+|u_n|) = 2\log\left(\prod_{n=N}^{\infty}(1+|u_n|)\right) < \infty.$$

無限乗積の収束

さらに，無限級数と同様，次が成り立つ．

定理 2

無限乗積 $\displaystyle\prod_{n=0}^{\infty}(1+u_n)$ が絶対収束するなら，積の順番を変えた無限乗積も同じ値に収束する，

i.e.,
全単射 $p:\mathbb{N}_0\to\mathbb{N}_0$ ($\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$) に対し，

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1+u_{p(n)})=\prod_{n=0}^{\infty}(1+u_n).$$

（補遺）定理２の証明

（参考）黒木玄：微分積分学のノート，
`https://genkuroki.github.io/documents/Calculus/`

$$\prod_{k=0}^{\infty}(1+u_k) = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n}(1+u_k) = \lim_{n\to\infty}\sum_{I\subset\{\,0,1,2,\dots,n\,\}}\prod_{k\in I}u_k. \tag{1}$$

$$\sum_{I\subset\{\,0,1,2,\dots,n\,\}}\left|\prod_{k\in I}u_k\right| = \prod_{k=0}^{n}(1+|u_k|) \leq \prod_{k=0}^{n}\exp|u_k| \leq \exp\left(\sum_{k=0}^{\infty}|u_k|\right) < \infty$$

により，(1) は絶対収束する．ところが，

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1+u_{p(n)}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{I\subset\{\,0,1,2,\dots,n\,\}}\prod_{k\in I}u_{p(k)}$$

右辺には，(1) 最右辺の無限級数に含まれる項が順序を変えて現れる．
絶対収束する無限級数は和の順序を入れ替えても同じ値に収束するから
（これも「補遺」で証明しておく），$\prod(1+u_{p(n)}) = \prod(1+u_n)$ が示された．■

定理 3

$D \subset \mathbb{C}$: 領域.

- $u_n(z)$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) : D における解析関数.
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$: D に含まれる任意のコンパクト集合 K で一様収束する.

$\displaystyle\prod_{n=0}^{\infty}(1 + u_n(z))$ は D に含まれる任意のコンパクト集合で絶対かつ一様収束し，D における解析関数を与える.

無限乗積で定義された複素関数

（証明のスケッチ）「一様収束」のみ示す．補遺にちゃんとした証明を載せる．

$K \subset D$：コンパクト集合．$\epsilon > 0$：任意．

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$ は K 上一様収束であるから，

- $u_n(z) \to 0$（K 上一様収束）．これより，

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad |\log(1 + u_n(z))| \leq 2|u_n(z)| \quad (\forall n \geq N, \forall z \in K).$$

- $\displaystyle\left\{\sum_{k=N}^{n} |u_k(z)|\right\}_{n \geq N}$ は K 上一様に Cauchy 列である，i.e.

$$\exists N_1 \geq N \quad \text{s.t.} \quad \sum_{k=m+1}^{n} |u_k(z)| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad (\forall n > \forall m \geq N_1, \forall z \in K).$$

これより，

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} \log(1 + u_k(z))\right| \leq 2 \sum_{k=m+1}^{n} |u_k(z)| \leq \epsilon \quad (\forall n > \forall m \geq N_1, \forall z \in K).$$

無限乗積で定義された複素関数

よって，各点 $z \in K$ に対し $\left\{ \sum_{k=N}^{n} \log(1 + u_k(z)) \right\}_{n \geq N}$ は $\mathbb{C}$ の Cauchy 列であり，$\mathbb{C}$ の完備性より収束列である．

$$h(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=N}^{n} \log(1 + u_k(z)) = \sum_{k=N}^{\infty} \log(1 + u_k(z))$$

とおくと，これが $z \in K$ について一様収束であることが示される．

つぎに，コンパクト集合上の連続関数は一様連続であることから，$\exp z$ が $\mathbb{C}$ の有界閉集合上で一様連続であることを用いれば，

$$\exp h(z) = \prod_{k=N}^{\infty} (1 + u_k(z)) = \exp\left(\sum_{k=N}^{\infty} \log(1 + u_k(z)) \right) \quad (K \text{ 上一様収束})$$

が示される．■

「絶対収束」の証明は，上の証明の前半を修正して得られる．

最後に…テータ関数が整関数であること

$\vartheta_3(v|\tau)$ について示す.

$$\vartheta_3(v|\tau) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+2q^{2n-1}\cos 2\pi v + q^{4n-2}), \quad \operatorname{Im}\tau > 0,\ q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\tau}\ (\,|q|<1\,).$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+2q^{2n}\cos 2\pi v + q^{4n-2})$$

が任意の $R>0$ に対し $|\operatorname{Im} v| \le R$ 上で一様収束することを示せばよい.
（任意のコンパクト集合は，R を十分大きく取れば $|\operatorname{Im} v| \le R$ に含まれる）.

$$|2q^{2n-1}\cos 2\pi v + q^{4n-2}| \le 3|q|^{2n-1}\mathrm{e}^{2\pi R} \quad (\,|\operatorname{Im} v| \le R\,),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3|q|^{2n-1}\mathrm{e}^{2\pi R} = \frac{3|q|}{1-|q|^2}\mathrm{e}^{2\pi R} < \infty$$

であるから，Weierstrass の M-判定法により，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(2q^{2n-1}\cos 2\pi v + q^{4n-2})$ は

$|\operatorname{Im} v| \le R$ で一様収束する．ゆえに，$\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1+2q^{2n-1}\cos 2\pi v + q^{4n-2})$ は

$|\operatorname{Im} v| \le R$ で一様収束する.

（補遺）絶対収束する無限級数の性質

定理 A1

絶対収束する無限級数は，和の順序を変えても同じ値に収束する，i.e.,

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$: 絶対収束.
- $p : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$: 全単射 ($\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{ 0 \}$)

このとき，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{p(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n .$$

(証明) 3 ステップに分ける.

Step 1　$\sum a_k$ が正項級数の場合.

$$q(n) = \max\{\, p(0), p(1), \ldots, p(n) \,\} \quad (\, n = 0, 1, 2, \ldots \,)$$

とおくと，$q(n) \geq n$ であるから，

$$\sum_{k=0}^{n} a_{p(k)} \leq \sum_{k=0}^{q(n)} a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty.$$

よって，$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_{p(k)}$ は収束して $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_{p(k)} \leq \sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ は $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_{p(k)}$ の和の順序を変えたものであるから，$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} a_{p(k)}$.

$$\therefore \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_{p(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Step 2　$\sum a_k$ が一般の実数級数の場合.

$$a_k^+ := \begin{cases} a_k & (\, a_k \geq 0 \,) \\ 0 & (\, a_k < 0 \,), \end{cases} \qquad a_k^- := \begin{cases} 0 & (\, a_k \geq 0 \,) \\ |a_k| & (\, a_k < 0 \,) \end{cases}$$

とおくと,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k^+ - \sum_{k=0}^{n} a_k^- .$$

$$a_k^\pm \leq |a_k|, \quad \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty$$

であるから, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k^\pm$ は収束する正項級数であり, Step 1 より

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=0}^{\infty} a_k^- = \sum_{k=0}^{\infty} a_{p(k)}^+ - \sum_{k=0}^{\infty} a_{p(k)}^- = \sum_{k=0}^{\infty} a_{p(k)}.$$

Step 3　$\sum a_k$ が絶対収束する複素数級数の場合.

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Re} a_k + \mathrm{i} \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Im} a_k,$$

$$|\operatorname{Re} a_k|, |\operatorname{Im} a_k| \leq |a_k|, \quad \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty$$

であるから，$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Re} a_k$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Im} a_k$ は絶対収束する実数列であり，Step 2 より

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Re} a_k + \mathrm{i} \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Im} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Re} a_{p(k)} + \mathrm{i} \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Im} a_{p(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{p(k)}.$$

■

（補遺）定理 3 の証明

（証明）　$K \subset D$：コンパクト集合．$\epsilon > 0$：任意．

$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$（$K$ 上一様収束）より，

- $u_n(z) \to 0$（K 上一様収束）．これより，

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad |\log(1+u_n(z))| \leq 2|u_n(z)| \quad (\,\forall n \geq N,\ \forall z \in K\,).$$

- $\left\{ \sum_{k=N}^{n} |u_k(z)| \right\}_{n \geq N}$ は K 上一様に Cauchy 列である，i.e.

$$\exists N_1 \geq N \quad \text{s.t.} \quad \sum_{k=m+1}^{n} |u_k(z)| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad (\,\forall n > \forall m \geq N_1,\ \forall z \in K\,).$$

これより，

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} \log(1+u_k(z)) \right| \leq 2 \sum_{k=m+1}^{n} |u_k(z)| \leq \epsilon \quad (\,\forall n > \forall m \geq N_1,\ \forall z \in K\,).\ (2)$$

（補遺）定理３の証明

よって，$z \in K$ を固定すると，$\left\{ \sum_{k=N}^{n} \log(1+u_k(z)) \right\}_{n \geq N}$ は $\mathbb{C}$ の Cauchy 列であり，$\mathbb{C}$ の完備性より収束列である．

$$h(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=N}^{n} \log(1+u_k(z)) = \sum_{k=N}^{\infty} \log(1+u_k(z))$$

とおく．(2) で $n \to \infty$ とすると，

$$\left| \sum_{k=m+1}^{\infty} \log(1+u_k(z)) \right| = \left| h(z) - \sum_{k=N}^{m} \log(1+u_k(z)) \right| \leq \epsilon \quad (\,\forall m \geq N_1,\ \forall z \in K\,),$$

$$\therefore \quad \sum_{k=N}^{\infty} \log(1+u_k(z)) = h(z) \quad （K \text{ 上一様収束}）.$$

（補遺）定理３の証明

次に，$\displaystyle\prod_{k=N}^{\infty}(1+u_k(z)) = \exp h(z)$ （K 上一様収束）を示す．それには，
コンパクト集合上の連続関数は一様連続であることを用いる．
$\alpha = \displaystyle\max_{z\in K}|h(z)|$ とおくと，$\exp z$ は $|z| \le \alpha+1$ 上で連続（すなわち一様連続）
である，i.e.,

$$\exists\delta>0 \quad \text{s.t.} \quad |z_1|,|z_2| \le \alpha+1,\ |z_1-z_2| \le \delta \implies |\exp z_1 - \exp z_2| \le \epsilon.$$

$z \in K$, $m > N_1$ とすると，(2) より

$$\left|\sum_{k=N}^{m}\log(1+u_k(z))\right| \le |h(z)|+\epsilon \le \alpha+1, \quad |h(z)| \le \alpha+1 \quad (\forall z \in K).$$

証明前半より $\displaystyle\sum_{k=N}^{\infty}\log(1+u_k(z)) = h(z)$ （K 上一様収束）であったから，
$N_2(\ge N_1)$ を十分大きく取れば

$$\left|\sum_{k=N}^{m}\log(1+u_k(z)) - h(z)\right| \le \delta \quad (\forall m \ge N_2,\ \forall z \in K).$$

したがって，

$$\left|\prod_{k=N}^{m}(1+u_k(z)) - \exp h(z)\right| \leq \left|\exp\left(\sum_{k=N}^{m}\log(1+u_k(z))\right) - \exp h(z)\right|$$
$$\leq \epsilon \quad (\forall m \geq N_2,\ \forall z \in K\ ),$$

$$\therefore \quad \prod_{k=N}^{\infty}(1+u_k(z)) = \exp h(z) \quad （K\ 上一様収束）.$$

■