数値解析と複素関数論 (2)
等間隔標本点 Lagrange 補間

緒方　秀教

電気通信大学　大学院情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻

2020 年 12 月 2 日（水）

（復習）Lagrange 補間

- $f(x)$：未知関数.
- 点 $x_1, \ldots, x_N$（標本点）における値 $f(x_k)$ はわかっている.

$x \neq x_k$ ($k = 1, \ldots, N$) における関数値 $f(x)$ を近似計算したい.

Lagrange 補間

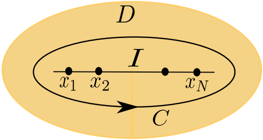
$f_N(x_k) = f(x_k)$ ($k = 1, \ldots, N$) なる（$N-1$ 次）多項式 $f_N(x)$ による $f(x)$ の近似.

$$f_N(x) = \sum_{k=1}^{N} f(x_k) \frac{W(x)}{W'(x_k)(x - x_k)}, \quad W(x) = \prod_{j=1}^{N} (x - x_j).$$

（復習）Lagrange 補間

$f(x)$ が解析関数の場合，Lagrange 補間
$f_N(x)$ は複素積分で表される．

- $x_1, \ldots, x_N \in$ 区間 $I \subset$ 領域 D.
- $f(z)$ は D 上の解析関数.



$$\text{Lagrange 補間} \quad f_N(x) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C f(z) \frac{W(z) - W(x)}{(z - x) W(z)} \mathrm{d}z,$$

$$\text{補間誤差} \quad f(x) - f_N(z) = \frac{W(x)}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{(z - x) W(z)} \mathrm{d}z,$$

C : D に含まれ I を反時計回りに囲む閉積分路.

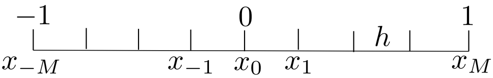
補間誤差の複素積分表示の大きさを評価することにより，
補間誤差の大きさが理論的に見積もれる．

等間隔標本点 Lagrange 補間

- 等間隔に標本点が並んだ Lagrange 補間を考える.
- 補間を考える区間は $I = [-1, 1]$ にとる.

$$\text{標本点数}\quad N = 2M + 1,$$

$$\text{標本点}\quad x_k = -1 + kh \quad \left(k = -M, -M+1, \ldots, M;\ h = \frac{1}{M} \right).$$



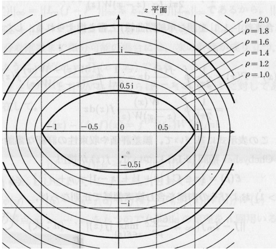
等間隔標本点 Lagrange 補間の理論誤差評価

定理：補間誤差評価

- $\mathscr{A}(\rho) = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \left| \dfrac{(z+1)^{z+1}}{(z-1)^{z-1}} \right| = (2\rho)^2 \right\} \quad (\,\rho > 1\,).$
- $f(z)$ は $\mathscr{A}(\rho)$ とその内部で解析関数である.

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - f_N(x)| \lesssim \frac{C(\rho)}{\rho^N} \max_{z \in \mathscr{A}(\rho)} |f(z)|,$$

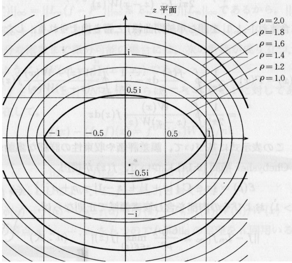
$C(\rho)$ ： ρ のみに依存する正定数.



$\mathscr{A}(\rho)$ の図

＊ 杉原正顯・室田一雄：数値計算法の数理,
岩波書店（1994 年）より引用.

等間隔標本点 Lagrange 補間の理論誤差評価



$\mathscr{A}(\rho)$ の図.

$f(z)$ が $\mathscr{A}(\rho)$ $(\rho > 1)$ とその内部で解析関数ならば，等間隔標本点 Lagrange 補間について，

$$\text{誤差} = \mathrm{O}(\rho^{-N}),$$

指数関数的収束.

∗ 図は，杉原正顯・室田一雄：数値計算法の数理，岩波書店（1994 年）より.

- （定理の条件のもとで）Lagrange 補間は指数関数的収束する.
- 収束のスピードは，関数がどこで解析的であるかに依る.

補間誤差評価の証明

補間誤差の複素積分表示を用いる（積分路は $\mathscr{A}(\rho)$ にとれる）.

$$f(x) - f_N(x) = \frac{W(x)}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\mathscr{A}(\rho)} \frac{f(z)}{(z-x)W(x)} \mathrm{d}z \quad (-1 \leq x \leq 1),$$

$$W(x) = \prod_{j=-M}^{M} (x - jh), \quad h = \frac{1}{M}.$$

右辺の複素積分の大きさを評価すればよい.
積分の大きさの評価は次を用いるのが定石：

$$\left| \int_C g(z) \mathrm{d}z \right| \leq \int_C |g(z)| |\mathrm{d}z|.$$

補間誤差評価の証明

$$|f(x) - f_N(x)| \le \frac{|W(x)|}{2\pi} \oint_{\mathscr{A}(\rho)} \frac{|f(z)|}{|z-x||W(z)|} |\mathrm{d}z|$$
$$\le \frac{(\mathscr{A}(\rho)\text{ の周長})}{2\pi \min_{z,x} |z-x|} \max_{z\in\mathscr{A}(\rho)} |f(z)| \frac{|W(x)|}{\min_{z\in\mathscr{A}(\rho)} |W(z)|}.$$

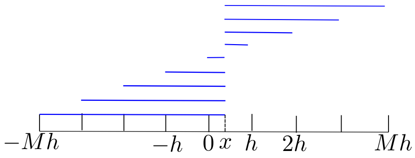
赤字の分子・分母を評価する．

（分子の評価）

$$|W(x)| = |x-(-M)h||x-(-M+1)h| \cdots |x-(M-1)h||x-Mh|.$$

右辺は右図の青い線分の長さの積であることを考えれば，

$$\text{右辺} \le h \cdot h(2h)(3h) \cdots (2Mh)$$
$$= \frac{(2M)!}{M^{2M+1}}.$$



補間誤差評価の証明

$$\therefore \quad |W(x)| \leq \frac{(2M)!}{M^{2M+1}}.$$

一般に正の整数 n の階乗については，次の Stirling の公式が成り立つ：

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n}(n/\mathrm{e})^n.$$

$$\therefore \quad |W(x)| \lesssim \frac{1}{M^{2M+1}}\sqrt{2^2\pi M}\left(\frac{2M}{\mathrm{e}}\right)^{2M} = \sqrt{\frac{4\pi}{M}}\left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^{2M}.$$

（分母の評価）

$$|W(z)| = \prod_{j=-M}^{M}\left|z - \frac{j}{M}\right|,$$

$$\frac{1}{M}\log|W(z)| = \frac{1}{M}\sum_{j=-M}^{M}\log\left|z - \frac{j}{M}\right| = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{M}\sum_{j=-M}^{M}\log\left(z - \frac{j}{M}\right)\right\}$$

（M が大きいならば）

$$\approx \mathrm{Re}\left\{\int_{-1}^{1}\log(z-x)\mathrm{d}x\right\} = \mathrm{Re}\left\{\log\frac{(z+1)^{z+1}}{(z-1)^{z-1}} - 2\right\}.$$

$z \in \mathscr{A}(\rho)$ であるから $\mathscr{A}(\rho)$ の定義より，

$$\frac{1}{M}\log|W(z)| \approx \mathrm{Re}(2\log 2\rho - 2) = 2\log\left(\frac{2\rho}{\mathrm{e}}\right), \quad |W(z)| \approx \left(\frac{2\rho}{\mathrm{e}}\right)^{2M}.$$

結局，次を得る．

$$|f(x) - f_N(x)| \leq \rho \text{ に依る定数} \times \max_{z\in\mathscr{A}(\rho)}|f(z)| \times \underbrace{\frac{|W(x)|}{\min_{z\in\mathscr{A}(\rho)}|W(z)|}}_{(1)},$$

$$|W(x)| \lesssim \sqrt{\frac{4\pi}{M}}\left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^{2M}, \quad \min_{z\in\mathscr{A}(\rho)}|W(z)| \approx \left(\frac{2\rho}{\mathrm{e}}\right)^{2M},$$

$$(1) \lesssim \sqrt{\frac{4\pi}{M}}\left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^{2M}\left(\frac{\mathrm{e}}{2\rho}\right)^{2M} = \sqrt{4\pi}\rho^{-2M} = \sqrt{4\pi}\rho\cdot\rho^{-N}.$$

■

数値例

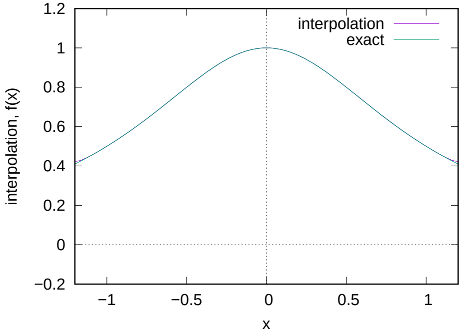
複素積分表示による理論誤差評価が正しいか，実際の数値実験で吟味する．

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

数値例

複素積分表示による理論誤差評価が正しいか，実際の数値実験で吟味する．

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$



$f(x)$ とその 25 点等間隔標本点 Lagrange 補間多項式 $f_N(x)$ のグラフ．
肉眼では両者の区別がつかない．

数値例

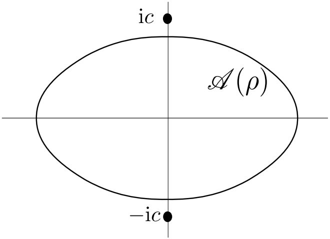
$$f(x) = \frac{1}{c^2 + x^2} \quad (\ c > 0 \quad \text{const.}\ ).$$

$f(z)$ は $z = \pm\mathrm{i}c$ に 1 位の極を持つ.

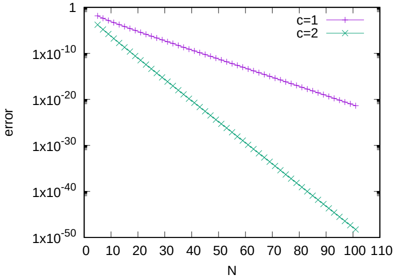
$\Rightarrow$ $\pm\mathrm{i}c \notin$（$\mathscr{A}(\rho)$ とその内部）なる $\mathscr{A}(\rho)$ 内部で $f(z)$ は解析的で,

$$誤差 \quad \epsilon_N \equiv \max_{-1 \le x \le 1} |f(x) - f_N(x)| = \mathrm{O}(\rho^{-N}).$$

- （数値実験）誤差 ϵ_N の N に対する振る舞いを調べた.
- （理論誤差評価）
  $\pm\mathrm{i}c \in \mathscr{A}(\rho)$ なる ρ により
  $$\epsilon_N \approx \mathrm{O}(\rho^{-N}).$$



数値例



数値実験より求めた誤差 ϵ_N

c	誤差	
	実験	理論
1	$\mathrm{O}(1.58^{-N})$	$\mathrm{O}(1.55^{-N})$
2	$\mathrm{O}(2.87^{-N})$	$\mathrm{O}(2.83^{-N})$

- 誤差 ϵ_N は指数関数的減衰：$\epsilon_N = \mathrm{O}(\rho^{-N})$.
- 数値実験結果は理論誤差評価とよく符合する.

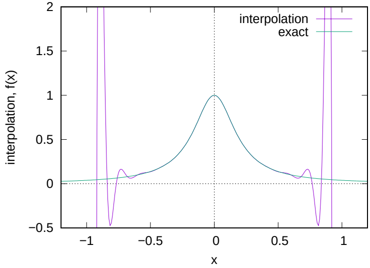
関数が解析的である範囲が広いと，補間精度は良くなる.

数値例

理論誤差評価の定理の仮定を満たさない $f(x)$ に対して，
等間隔標本点 Lagrange 補間はどうなるか？

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}.$$

$$f(z) \text{ の極 } \pm \mathrm{i}/5 \in (\mathscr{A}(\rho) \text{ 内部}), \quad \forall\rho > 1.$$



補間を考えている区間 $[-1, 1]$
端点近くで補間多項式 $f_N(x)$ は
激しく振動する．

Runge の現象

関数の極が補間区間近くにあると，補間の精度は悪くなる．

まとめ

- 等間隔点標本点 Lagrange 補間.
- 理論誤差評価：補間誤差の複素積分表示を利用.
- 数値例.
    - 関数が解析的である範囲が広い（狭い）ほど，精度は良くなる（悪くなる）.
    - 数値実験結果と理論誤差評価は符合する.
    - 関数の極が補間区間に近いと，精度が悪くなる（Runge の現象）.

複素関数論による理論は役に立つ.