数値解析と複素関数論 (3)
Chebyshev 補間

緒方　秀教

電気通信大学　大学院情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻

2020 年 12 月 5 日（土）

（復習）Lagrange 補間

- $f(x)$：未知関数.
- 点 $x_1, \dots, x_N$（標本点）における値 $f(x_k)$ はわかっている.

$x \neq x_k$ ($k = 1, \dots, N$) における関数値 $f(x)$ を近似計算したい.

Lagrange 補間

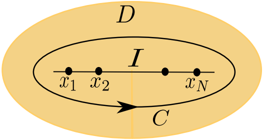
$f_N(x_k) = f(x_k)$ ($k = 1, \dots, N$) なる（$N-1$ 次）多項式 $f_N(x)$ による $f(x)$ の近似.

$$f_N(x) = \sum_{k=1}^{N} f(x_k) \frac{W(x)}{W'(x_k)(x - x_k)}, \quad W(x) = \prod_{j=1}^{N} (x - x_j).$$

（復習）Lagrange 補間

$f(x)$ が解析関数の場合，Lagrange 補間 $f_N(x)$ は複素積分で表される．

- $x_1, \ldots, x_N \in$ 区間 $I \subset$ 領域 D.
- $f(z)$ は D 上の解析関数.



$$\text{Lagrange 補間}\quad f_N(x) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C f(z) \frac{W(z) - W(x)}{(z - x)W(z)} \mathrm{d}z,$$

$$\text{補間誤差}\quad f(x) - f_N(z) = \frac{W(x)}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{(z - x)W(z)} \mathrm{d}z,$$

C ： D に含まれ I を反時計回りに囲む閉積分路.

補間誤差の複素積分表示の大きさを評価することにより，
補間誤差の大きさが理論的に見積もれる．

Chebyshev 補間

Chebyshev（チェビシェフ）補間

（区間 $[-1,1]$ 上で関数 $f(x)$ の補間を行うとする）

Chebyshev 多項式 $T_N(x)$ の零点を標本点とする補間.

$$f_N(x) = \sum_{k=1}^{N} f(x_k) \frac{T_N(x)}{T_N'(x_k)(x - x_k)},$$

$T_N(x)$ ：（N 次）Chebyshev 多項式,

$x_1, \dots, x_N$ ： $T_N(x)$ の零点.

Chebyshev 多項式 $T_N(x)$

$$T_N(\cos\theta) = \cos N\theta.$$

Chebyshev 多項式

Chebyshev 多項式 $T_N(x)$

$$T_N(\cos\theta) = \cos N\theta.$$

$\cos N\theta$ を $\cos\theta$ の多項式で表して $\cos\theta \to x$ とすれば,
Chebyshev 多項式 $T_N(x)$ が得られる.

$$\begin{aligned}
&(\ N = 0\ ) \quad T_0(\cos\theta) = \cos 0\theta = 1, \quad \therefore \quad T_0(x) = 1. \\
&(\ N = 1\ ) \quad T_1(\cos\theta) = \cos\theta, \quad \therefore \quad T_1(x) = x. \\
&(\ N = 2\ ) \quad T_2(\cos\theta) = \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1, \quad \therefore \quad T_2(x) = 2x^2 - 1. \\
&(\ N = 3\ ) \quad T_3(\cos\theta) = \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta, \quad \therefore \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x. \\
&\qquad\qquad\quad \cdots
\end{aligned}$$

Chebyshev 補間の標本点

$$x_k = \cos\left(\frac{\pi}{N}\left(k - \frac{1}{2}\right)\right) \quad (\ k = 1, \ldots, N\ ).$$

Chebyshev 補間の理論誤差評価

定理：Chebyshev 補間の理論誤差評価

$f(z)$ は楕円

$$\mathscr{E}(\rho) = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z+1| + |z-1| = \rho + \rho^{-1} \right\} \quad (\, \rho > 1 \,)$$

とその内部を含む領域で解析関数であるとする．このとき,

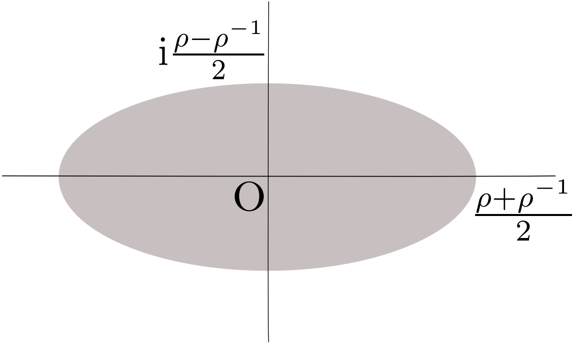
$$\max_{-1 \le x \le 1} |f(x) - f_N(x)| \lesssim \frac{C(\rho)}{\rho^N} \max_{z \in \mathscr{E}(\rho)} |f(z)|,$$

$C(\rho)$ ： ρ のみに依る正定数.

Chebyshev 補間の誤差 $= \mathrm{O}(\rho^{-N})$ 　指数関数的減衰.

定理：Chebyshev 補間の理論誤差評価

楕円 $$\begin{aligned}\mathscr{E}(\rho) &= \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z+1| + |z-1| = \rho + \rho^{-1} \right\} \\ &= \left\{ x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \;\middle|\; \frac{4x^2}{(\rho+\rho^{-1})^2} + \frac{4y^2}{(\rho-\rho^{-1})^2} = 1 \right\}.\end{aligned}$$



* $\mathscr{E}(\rho)$ の表式の導出は，補遺を参照.

証明：Chebyshev 補間の理論誤差評価

Chebyshev 補間の誤差の複素積分表示

$$f(x) - f_N(x) = \frac{T_N(x)}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{\mathscr{E}(\rho)} \frac{f(z)}{(z-x)T_N(z)} \mathrm{d}z \quad (\,-1 \leq x \leq 1\,).$$

$$\begin{aligned} |f(x) - f_N(x)| &\leq \frac{|T_N(x)|}{2\pi} \oint_{\mathscr{E}(\rho)} \frac{|f(z)|}{|z-x||T_N(z)|} |\mathrm{d}z| \\ &\leq \frac{\mathscr{E}(\rho)\ \text{の周長}}{2\pi \min_{z,x} |z-x|} \times \max_{z \in \mathscr{E}(\rho)} |f(z)| \times \frac{|T_N(x)|}{\min_{z \in \mathscr{E}(\rho)} |T_N(z)|}. \end{aligned}$$

赤字の部分を評価する．

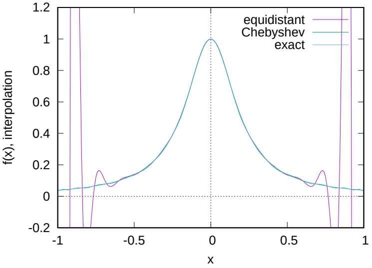
$-1 \leq x \leq 1$ より $x = \cos\theta$ とおくと $|T_N(x)| = |\cos N\theta| \leq 1$.

$z \in \mathscr{E}(\rho)$ のとき $|T_N(z)| \simeq \rho^N/2$ （補遺で示す）.

$$\therefore \quad \text{赤字の部分} \lesssim \frac{2}{\rho^N}.$$

数値例

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2} \quad (z = \pm i/5 \text{ に 1 位の極}).$$



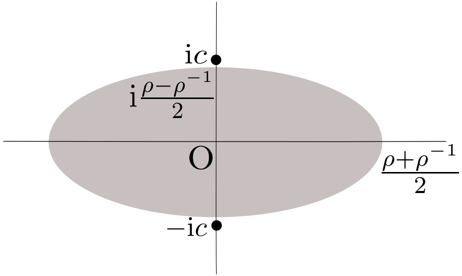
- 等間隔標本点 Lagrange 補間（25 点, equidistant）：
  端点 $x = \pm 1$ 近傍で激しく振動（Runge の現象）.
- Chebyshev 補間（25 点）；
  厳密な $f(x)$(exact) と肉眼で見分けられない.

数値例：理論誤差評価の検証

$$f(x) = \frac{1}{c^2 + x^2} \quad (\, c > 0,\ z = \pm \mathrm{i}c \text{ に 1 位の極 }).$$

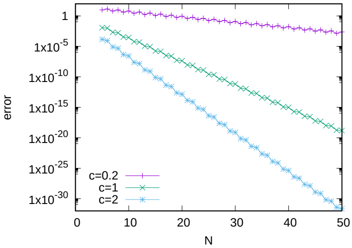
$$\text{誤差} \quad \epsilon_N \equiv \max_{-1 \le x \le 1} |f(x) - f_N(x)|.$$

- （数値実験）ϵ_N を求め N に対する振る舞いを調べた.
- （理論誤差評価）極 $\pm \mathrm{i}c \in \mathscr{E}(\rho)$ なる ρ に対し $\epsilon_N = \mathrm{O}(\rho^{-N})$.



数値例：理論誤差評価の評価

$$f(x) = \frac{1}{c^2 + x^2} \quad (\, c > 0\,).$$



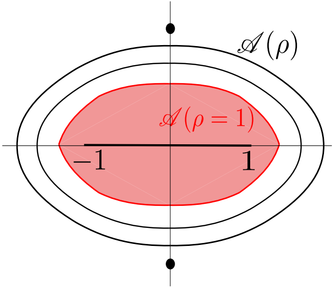
誤差 ϵ_N の変化.

c	誤差 ϵ_N 実験	誤差 ϵ_N 理論
0.2	$\mathrm{O}(1.22^{-N})$	$\mathrm{O}(1.22^{-N})$
1	$\mathrm{O}(2.41^{-N})$	$\mathrm{O}(2.41^{-N})$
2	$\mathrm{O}(4.23^{-N})$	$\mathrm{O}(4.24^{-N})$

- 指数関数的収束.
- 極が遠いほど（c が大きいほど）誤差の減衰が速い.
- 理論誤差評価は実験結果とよく符合する.

等間隔標本点補間との比較

等間隔標本点 Lagrange 補間

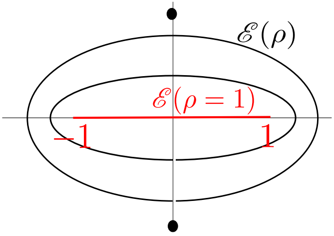


- $\mathscr{A}(\rho)$ ($\rho > 1$) とその内部で $f(z)$ が解析的ならば，補間 $f_N(x)$ は $f(x)$ に収束する．
- $f(z)$ の特異点が補間区間 $[-1, 1]$ にあまりにも近いと，$f(z)$ が $\mathscr{A}(\rho)$ とその内部で解析的となるような $\rho(> 1)$ が存在しない．

$$\mathscr{A}(\rho) = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \left| \frac{(z+1)^{z+1}}{(z-1)^{z-1}} \right| = (2\rho)^2 \right\}.$$

等間隔標本点補間との比較

Chebyshev 補間



- $\mathscr{E}(\rho)$ ($\rho > 1$) とその内部で $f(z)$ が解析的ならば，補間 $f_N(x)$ は $f(x)$ に収束する．
- $f(z)$ の特異点がどんなに補間区間 $[-1, 1]$ に近くても，十分 ρ を $\rho = 1$ 近くに取れば，$f(z)$ は $\mathscr{E}(\rho)$ とその内部で解析的となる．

$$\mathscr{E}(\rho) = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z+1| + |z-1| = \rho + \rho^{-1} \right\}.$$

Chebyshev 補間は，特異点が補間区間 $[-1, 1]$ に近い関数 $f(x)$ もカバーできる．

特異点が補間区間にあまりにも近いと，収束速度は遅くなるが…

まとめ

- Chebyshev 多項式 $T_N(x)$.

$$T_N(\cos\theta) = \cos N\theta.$$

- Chebyshev 補間：Chebyshev 多項式の零点を標本点にもつ補間.
- Chebyshev 補間の誤差：関数 $f(z)$ が楕円 $\mathscr{E}(\rho)$ ($\rho > 1$) とその内部で解析関数であるならば，Chebyshev 補間は指数関数的収束する.
- Chebyshev 補間は，関数 $f(z)$ の特異点が補間区間 $[-1, 1]$ にいくら近くても（収束速度は遅くなるが）収束する.

補遺

$z \in \mathscr{E}(\rho)$ のとき $|T_N(z)| \simeq \rho^N/2$ となること

$z = \cos\varphi$, $w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ （φ：複素変数）とおくと,

$$T_N(z) = \cos N\varphi = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}N\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}N\varphi}) = \frac{1}{2}(w^N + w^{-N}), \tag{1}$$

$$z = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}) = \frac{1}{2}(w + w^{-1}). \tag{2}$$

$z \in \mathscr{E}(\rho)$ のとき, $|z+1| + |z-1| = \rho + \rho^{-1}$. これに上の (2) を代入して,

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right) + 1\right| + \left|\frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right) - 1\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\sqrt{w} + \frac{1}{\sqrt{w}}\right|^2 + \frac{1}{2}\left|\sqrt{w} - \frac{1}{\sqrt{w}}\right|^2 = |w| + |w|^{-1} = \rho + \rho^{-1}, \\
&|w|^2 - (\rho + \rho^{-1})|w| + 1 = (|w| - \rho)(|w| - \rho^{-1}) = 0, \\
&\therefore \quad |w| = \rho, \rho^{-1}. \quad (1) \text{ より } \quad |T_N(z)| \simeq \frac{\rho^N}{2}.
\end{aligned}$$

補遺

$\mathscr{E}(\rho)$ が楕円になること

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\rho+\rho^{-1}. \tag{3}$$

(3) の逆数をとって,

$$\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=\frac{\sqrt{(x+1)^2+y^2}-\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{\{(x+1)^2+y^2\}-\{(x-1)^2+y^2\}}$$

$$=\frac{1}{4x}\left[\{(x+1)^2+y^2\}-\{(x-1)^2+y^2\}\right]=\frac{1}{\rho+\rho^{-1}},$$

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}-\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\frac{4x}{\rho+\rho^{-1}}. \tag{4}$$

((3)+(4))÷2 をつくって,

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\frac{\rho+\rho^{-1}}{2}+\frac{2x}{\rho+\rho^{-1}}.$$

両辺を 2 乗して整理すると次の式を得る.

$$\frac{4x^2}{(\rho+\rho^{-1})^2}+\frac{4y^2}{(\rho-\rho^{-1})^2}=1.$$