数値解析と複素関数論 (4)
数値積分：周期関数に対する台形則

緒方　秀教

電気通信大学　大学院情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻

2020 年 12 月 17 日（木）

はじめに

数値積分の**台形則**.

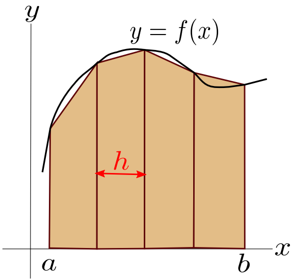
- 数値積分則としては最も素朴なものである.
- しかし，次の積分に対しては非常に有効である.
  - **周期関数である解析関数**の一周期区間積分.
  - 解析関数の全無限区間積分.

今回は，周期関数である解析関数に対して何故台形則は有効か，
複素関数論の手法で解明します.

台形則による数値積分

台形則

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \simeq h\left\{\frac{1}{2}f(a)+\sum_{k=1}^{N-1} f(a+kh)+f(b)\right\} \quad \left(h=\frac{b-a}{N}\right).$$



積分 $\simeq$ 台形の面積の和.

数値例：台形則

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} = 1.57079\,63267\,94897\ldots$$

この積分を台形則で近似計算した（倍精度演算）.

N	積分値（台形則）	相対誤差
4	1.55000 00000 00000	1×10^{-2}
8	1.56558 82352 94118	3×10^{-3}
16	1.56949 42472 45545	8×10^{-4}
32	1.57047 08060 20695	2×10^{-4}
64	1.57071 49465 87487	5×10^{-5}
128	1.57077 59817 42827	1×10^{-5}
256	1.57079 12405 31876	3×10^{-6}
512	1.57079 50552 29142	8×10^{-7}
1024	1.57079 600890 3456	2×10^{-7}

まあ，こんなものかなぁ…

数値例：周期関数に対して台形則は有効である

台形則は**周期関数**の積分に対して有効である.

数値例：周期関数に対して台形則は有効である

台形則は**周期関数**の積分に対して有効である．

（例）第 1 種完全楕円積分．

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-\kappa^2 \sin^2\theta}} \quad (0<\kappa<1).$$

N	積分値（台形則） $\kappa=\sqrt{0.5}$	積分値（台形則） $\kappa=0.9$
4	1.85407 52277 67308	2.28107 69934 49628
8	1.85407 46773 01667	2.28054 93522 99722
16	1.85407 46773 01372	2.28054 91384 22819
32	1.85407 46773 01372	2.28054 91384 22770
厳密値	1.85407 46773 01372	2.28054 91384 22770

収束が断然速い．

今日の目標

定理：周期関数積分に対する台形則の指数関数的収束

- $f(z)$ は**周期関数**（周期 α）である．
- $f(z)$ は実軸全体を含む複素領域で**解析関数**である．

$f(x)$ の一周期区間積分に対する台形則

$$\int_0^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x \simeq h\left\{\frac{1}{2}f(0) + \sum_{k=1}^{N-1} f(kh) + \frac{1}{2}f(Nh)\right\} \quad \left(h = \frac{\alpha}{N}\right)$$

に対し，

$$|\,誤差\,| \le C\exp(-cN) \quad (\ C, c > 0 : \ \mathrm{const.}\ ).$$

今回はこの定理を複素関数論的手法により導出する．

(Step 1/3) 台形則の複素積分表示

周期関数 $f(x)$（周期 α）の一周期区間積分に対する台形則．

$$I \equiv \int_0^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x \simeq I_N \equiv h\left\{\frac{1}{2}f(0) + \sum_{k=1}^{N-1} f(kh) + \frac{1}{2}f(Nh)\right\} \quad \left(h = \frac{\alpha}{N}\right).$$

定理：台形則の複素積分表示

- $f(z)$ は実軸全体を含む領域 D で解析関数である．
- $f(z)$ は周期関数である（周期 α）．

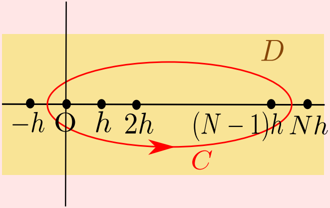
$$I_N = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C f(z)\Psi_h(z)\mathrm{d}z,$$

$$\Psi_h(z) = \pi\cot\left(\frac{\pi z}{h}\right),$$

C ：領域 D に含まれ，

点 $0, h, \ldots, (N-1)h$ を

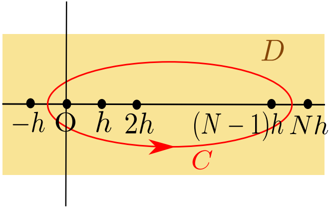
反時計回りに囲む閉積分路．



(Step 1/3) 台形則の複素積分表示

（定理の証明）

$$J \equiv \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C f(z)\Psi_h(z)\mathrm{d}z,$$
$$\Psi_h(z) = \pi \cot\left(\frac{\pi z}{h}\right).$$



被積分関数 $f(z)\Psi_h(z)$ は C およびその内部において，1 位の極 $0, h, \ldots, (N-1)h$ を除いて解析的である．よって，留数定理より

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{Res}(f\Psi_h, kh).$$

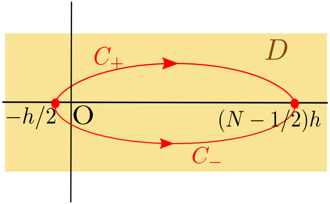
$$\mathrm{Res}(f\Psi_h, kh) = \lim_{z \to kh} (z - kh) f(z) \pi \cot\left(\frac{\pi z}{h}\right)$$
$$= \pi f(kh) \lim_{z \to kh} \frac{\cos(\pi z/h)}{\{\sin(\pi z/h)\}'} = hf(kh).$$

$$\therefore \quad J = h\sum_{k=0}^{N-1} f(kh) = h\left\{\frac{1}{2}f(0) + \sum_{k=1}^{N-1} f(kh) + \frac{1}{2}f(Nh)\right\} = I_N.$$

(Step 2/3) 台形則の誤差の複素積分表示

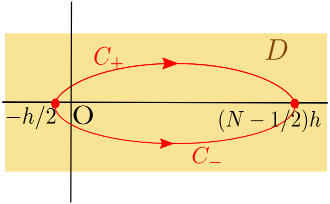
今度は，誤差 $I - I_N$ の複素積分表示を求める．

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-h/2}^{(N-1/2)h} f(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{C_+} + \int_{C_-}\right) f(z)\mathrm{d}z,
\end{aligned}
$$



今度は，誤差 $I - I_N$ の複素積分表示を求める．

$$I = \int_{-h/2}^{(N-1/2)h} f(x)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int_{C_+} + \int_{C_-}\right) f(z)\mathrm{d}z,$$



$$I_N = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{-C_+ + C_-} f(z)\Psi_h(z)\mathrm{d}z, \quad \Psi_h(z) = \pi \cot\left(\frac{\pi z}{h}\right)$$

との差をとって，

定理：誤差の複素積分表示

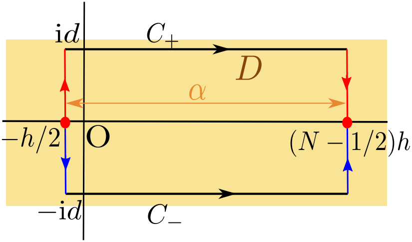
$$I - I_N = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{-C_+ + C_-} f(z)\Phi_h(z)\mathrm{d}z,$$
$$\Phi_h(z) = -\pi \frac{\exp(\pm \mathrm{i}\pi z/h)}{\sin(\pi z/h)} \quad (\pm \operatorname{Im} z > 0).$$

(Step 2/3) 台形則の誤差の複素積分表示

$f(z)$ は帯状領域 $|\operatorname{Im} z| \leq d$ で解析関数であると仮定する．
Cauchy の積分定理により複素積分路を図のように長方形状に変形する．

$$I - I_N = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \left(\int_{C_+} + \int_{C_-} \right) f(z)\Phi_h(z)\mathrm{d}z,$$

$$\Phi_h(z) = -\pi \frac{\exp(\pm \mathrm{i}\pi z/h)}{\sin(\pi z/h)} = -\pi \frac{\exp(\pm \mathrm{i}N\pi z/\alpha)}{\sin(N\pi z/\alpha)} \quad \left(\pm \operatorname{Im} z > 0;\ h = \frac{\alpha}{N} \right).$$



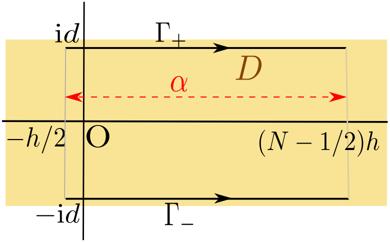
$f(z)\Phi_h(z)$ は周期 α の周期関数なので，
赤線，青線の寄与は打ち消し合う．

(Step 2/3) 台形則の誤差の複素積分表示

誤差の複素積分表示は，実軸に平行な積分路 $\Gamma_{\pm}: \operatorname{Im} z = \pm d$ の寄与だけが残る．

$$I - I_N = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \left(\int_{\Gamma_+} + \int_{\Gamma_-} \right) f(z)\Phi_h(z)\mathrm{d}z,$$

$$\Phi_h(z) = -\pi \frac{\exp(\pm \mathrm{i}\pi z/h)}{\sin(\pi z/h)} \quad (\pm \operatorname{Im} z > 0).$$



(Step 3/3) 台形則の誤差評価

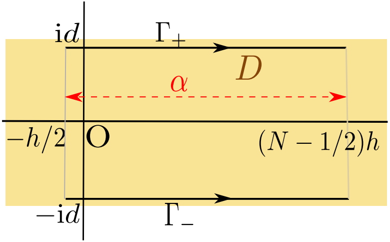
複素積分の大きさを見積もることにより理論誤差評価を行う．

$$|I - I_N| \le \frac{1}{2\pi}\left(\int_{\Gamma_+} + \int_{\Gamma_-}\right)|f(z)||\Phi_h(z)||\mathrm{d}z|,$$

$$\Phi_h(z) = -\pi\frac{\exp(\pm \mathrm{i}\pi z/h)}{\sin(\pi z/h)} \quad (\pm \operatorname{Im} z > 0).$$

$\Gamma_\pm$ ($|\operatorname{Im} z| = d$) 上での $|\Phi_h(z)|$ の評価．

$$|\Phi_h(z)| \le 2\pi\left|\frac{\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi z/h}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z/h} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi z/h}}\right| = \frac{2\pi\mathrm{e}^{-2\pi d/h}}{1-\mathrm{e}^{-2\pi d/h}} \simeq 2\pi\exp\left(-\frac{2\pi d}{h}\right).$$



台形則の理論誤差評価

定理：台形則の指数関数的収束

- $f(z)$ は $|\operatorname{Im} z| \le d$ を含む領域 D で解析関数である．
- $f(z)$ は周期関数である（周期 α）．

$$|I - I_N| \lesssim 2\alpha \|f\|_d \exp\left(-\frac{2\pi d}{h}\right) = 2\alpha \|f\|_d \exp\left(-\frac{2\pi d}{\alpha} N\right),$$

$$\|f\|_d \equiv \max_{|\operatorname{Im} z| = d} |f(z)|.$$

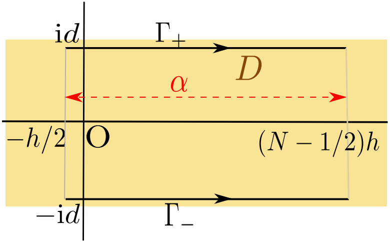
$$\text{誤差} = \mathrm{O}\left[\exp(-\text{const.} \times N)\right].$$

周期解析関数の一周期区間積分に対して，
台形則は指数関数的収束する．

なぜ台形則は周期関数の積分に強いのか？

誤差の積分表示は，実軸に平行な積分路 $\Gamma_\pm : \mathrm{Im}\, z = \pm d$ の寄与だけが残る．

$$I - I_N = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \left(\int_{\Gamma_+} + \int_{\Gamma_-} \right) f(z) \Phi_h(z) \mathrm{d}z,$$



- $f(x)$ の周期性により端点近傍の積分路の寄与は消える．
- $|\mathrm{Im}\, z| = d$ で $|\Phi_h(z)| \simeq 2\pi \exp\left(-\dfrac{2\pi d}{h}\right)$．

数値例：第1種完全楕円積分

$$K(\kappa) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-\kappa^2\sin^2\theta}} = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-\kappa^2\sin^2\theta}} \quad (\,0<\kappa<1\,)$$

$$\simeq \frac{h}{2}\left\{\frac{1}{2}f(-Nh) + \sum_{k=-N+1}^{N-1} f(kh) + \frac{1}{2}f(Nh)\right\} \quad \text{（$2N+1$ 点台形則）}$$

$$= h\left\{\frac{1}{2}f(0) + \sum_{k=1}^{N-1} f(kh) + \frac{1}{2}f(Nh)\right\} =: K_N(\kappa),$$

$$h = \frac{\pi}{2N}, \quad f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1-\kappa^2\sin^2\theta}}.$$

- $f(\theta)$ は周期関数（周期 π）である．
- $f(\theta)$ は $|\operatorname{Im}\theta| < \log(\kappa^{-1} + \sqrt{\kappa^{-2}-1})$ において解析関数である．

数値例：第 1 種完全楕円積分

理論誤差評価から，

$$|K(\kappa) - K_N(\kappa)| \lesssim C(\kappa^{-1} - \sqrt{\kappa^{-2} - 1})^{4N} \quad (C : \text{const.}).$$

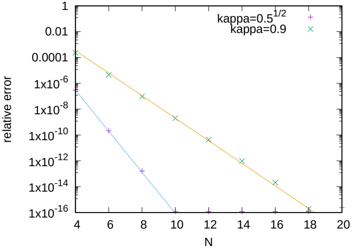
これを数値実験結果と比較する．

数値例：第 1 種完全楕円積分

理論誤差評価から,

$$|K(\kappa) - K_N(\kappa)| \lesssim C(\kappa^{-1} - \sqrt{\kappa^{-2} - 1})^{4N} \quad (\ C : \mathrm{const.}\ ).$$

これを数値実験結果と比較する.



κ	誤差	
	実験	理論
$\sqrt{0.5}$	$\mathrm{O}(0.0257^N)$	$\mathrm{O}(0.0294^N)$
0.9	$\mathrm{O}(0.134^N)$	$\mathrm{O}(0.154^N)$

理論誤差評価は数値実験結果とよく符合する.

まとめ

- 台形則は周期関数である解析関数の一周期区間積分に有効である.
- 複素関数論による理論誤差評価→指数関数的収束.
- 理論誤差評価は数値実験結果とよく符合する.

次回以降

- 台形則は解析関数の全無限区間積分に対して有効である.
- 変数変換による数値積分，DE 公式.