連分数はなぜ収束するか？(2)

緒方　秀教

電気通信大学　大学院情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻

2021 年 1 月 2 日（金）

前回のまとめ

- 次の形の連分数について収束解析をした.

$$w = \frac{a|}{|1} + \frac{a|}{|1} + \cdots, \quad a \notin \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \leq -\frac{1}{4} \right\}.$$

- 収束解析のカギを握るのは，一次分数変換

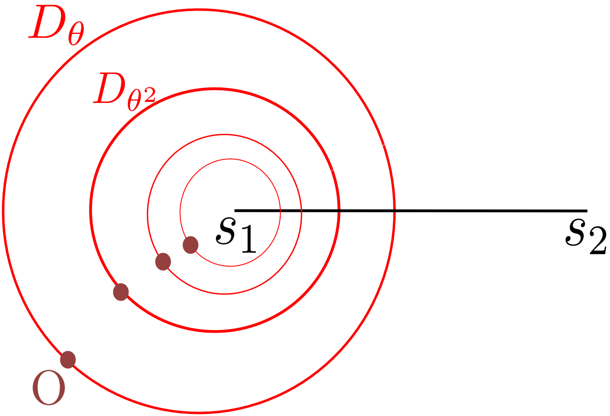
$$T_a(u) = \frac{a}{1+u}.$$

  - $w = T_a \circ T_a \circ \cdots (0)$.
  - T_a は Apollonius の円を縮める．→指数関数的収束.

今回はもっと一般的な形の連分数について収束解析をする.

（ネタ本）P. Henrici: Applied and Computational Complex Analysis, Vol.2, John Wiley & Sons, New York, 1977.

前回のまとめ



連分数族とその一様収束

今回は，次の形の「連分数族」についてその「一様収束」を考える．

$*$ 関数項連分数を想定．

$$\text{連分数族}\quad \mathscr{F} = \left\{ w^{(\lambda)} = \frac{a_0^{(\lambda)}}{|\,1} + \frac{a_1^{(\lambda)}}{|\,1} + \frac{a_2^{(\lambda)}}{|\,1} + \cdots \;\middle|\; \lambda \in \Lambda \right\}.$$

定義：連分数族 $\mathscr{F}$ は一様収束する．

各 $w^{(\lambda)} \in \mathscr{F}$ の第 n 近似分数を

$$w_n^{(\lambda)} = \frac{a_0^{(\lambda)}}{|\,1} + \frac{a_1^{(\lambda)}}{|\,1} + \cdots + \frac{a_n^{(\lambda)}}{|\,1}$$

とすると，

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad |w_n^{(\lambda)} - w^{(\lambda)}| \leq \epsilon \quad (\,\forall \lambda \in \Lambda,\ \forall n \geq N\,).$$

一次分数変換

一次分数変換

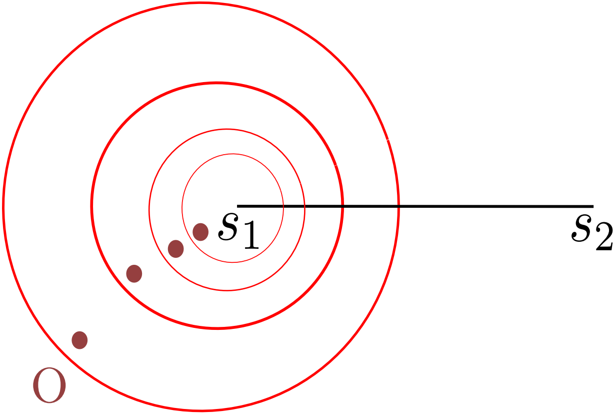
$$T_n^{(\lambda)}(u) = \frac{a_n^{(\lambda)}}{1+u} \quad (\, n = 0, 1, 2, \ldots,\ \lambda \in \Lambda\,),$$
$$T_{0,n}^{(\lambda)}(u) = T_0^{(\lambda)} \circ T_1^{(\lambda)} \circ \cdots T_n^{(\lambda)}(u).$$

$$w^{(\lambda)} = \frac{a_0^{(\lambda)}|}{|\,1} + \frac{a_1^{(\lambda)}|}{|\,1} + \cdots = T_0^{(\lambda)} \circ T_1^{(\lambda)} \circ \cdots (0),$$

近似分数 $\quad w_n^{(\lambda)} = \frac{a_0^{(\lambda)}|}{|\,1} + \frac{a_1^{(\lambda)}|}{|\,1} + \cdots + \frac{a_n^{(\lambda)}|}{|\,1} = T_{0,n}^{(\lambda)}(0).$

前回と同様，一次分数変換 $T_n^{(\lambda)}$ が Apollonius の円を縮める働きにより，連分数（続）$w^{(\lambda)}$ の（一様）収束が示される．

一次分数変換



縮小写像の原理

連分数に対する縮小写像の原理

閉集合 $D \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ は次を満たすとする.

1. $0 \in D$.
2. $T_n^{(\lambda)}(D) \subset D$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$: $\forall\lambda \in \Lambda$).
3. 十分大きい n に対し $T_{0,n}^{(\lambda)}(D)$ ($T_{0,n}^{(\lambda)} = T_0^{(\lambda)} \circ \cdots \circ T_n^{(\lambda)}$) は有界であり,

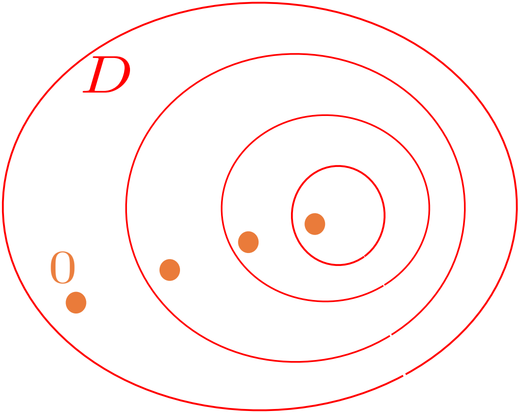
$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} T_{0,n}^{(\lambda)}(D) = 0 \quad (\lambda \in \Lambda \text{ について一様収束}).$$

$$\Downarrow$$

連分数族 $\mathscr{F}$ は一様収束し, $w^{(\lambda)} \in D$ ($\forall\lambda \in \Lambda$).

連分数族 $\mathscr{F}$ の固有領域 (eigendomain)

…上記 (1), (2) を満たす閉集合 $D \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.


D
0

縮小写像の原理（証明）

$\epsilon > 0$ 任意，$\delta_m^{(\lambda)} := \mathrm{diam}\ T_{0,n}^{(\lambda)}(D)$.

$N \in \mathbb{N}$ を $\delta_m^{(\lambda)} \leq \epsilon\ (\forall m \geq N,\ \forall \lambda \in \Lambda)$ となるようにとる．

$0 \in D$ であるから，$w_m^{(\lambda)} = T_{0,m}^{(\lambda)}(0) \in T_{0,m}^{(\lambda)}(D)$. $n > m \geq N$ とすると，

$$w_n^{(\lambda)} = T_{0,n}^{(\lambda)}(0) \in T_{0,n}^{(\lambda)}(D) = T_{0,m}^{(\lambda)} \circ T_{m+1}^{(\lambda)} \circ \cdots T_n^{(\lambda)}(D) \subset T_{0,m}^{(\lambda)}(D).$$

よって，$w_n^{(\lambda)}, w_m^{(\lambda)} \in T_{0,m}^{(\lambda)}(D)\ (n > m \geq N)$ であり，

$$|w_n^{(\lambda)} - w_m^{(\lambda)}| \leq \delta_m^{(\lambda)} \leq \epsilon \quad (\forall n > \forall m \geq N,\ \forall \lambda \in \Lambda).$$

これより，各 $\lambda \in \Lambda$ に対し $\{w_n^{(\lambda)}\}_n$ は $\mathbb{C}$ の Cauchy 列であり，$\mathbb{C}$ の完備性より収束列である．$w^{(\lambda)} = \lim_{n\to\infty} w_n^{(\lambda)}$ とおくと，上の不等式で $n \to \infty$ として，

$$|w^{(\lambda)} - w_m^{(\lambda)}| \leq \epsilon \quad (\forall m \geq N,\ \forall \lambda \in \Lambda).$$

したがって，$\mathscr{F}$ は一様収束する．$w_n^{(\lambda)} = T_{0,n}^{(\lambda)}(0) \in T_{0,n}^{(\lambda)}(D) \subset D$ と D が閉集合であることから，$w^{(\lambda)} = \lim_{n\to\infty} w_n^{(\lambda)} \in D$. ■

Perron-Pringsheim の定理

Perron-Pringsheim の定理

$$\mathscr{F} = \left\{ w^{(\lambda)} = \frac{a_0^{(\lambda)}|}{|1} + \frac{a_1^{(\lambda)}|}{|1} + \cdots \;\middle|\; \lambda \in \Lambda \right\} \quad \text{連分数族.}$$

次のような複素数 a が存在するとする.

1. $a \neq 0$ かつ $a \notin \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1/4 \}$.
2. a にのみ依る $\epsilon(a) > 0$ が存在し

$$|a_n^{(\lambda)} - a| \leq \epsilon(a) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots, \forall \lambda \in \Lambda).$$

このとき，連分数族 $\mathscr{F}$ は一様収束する.

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{a + \frac{1}{4}} \quad (\,|s_1| < |s_2|\,), \qquad \theta = \left|\frac{s_1}{s_2}\right|.$$

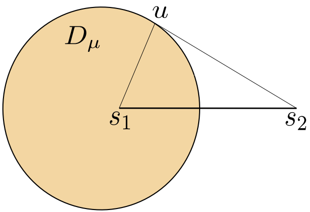
定理の主張は，$\epsilon(a)$ を次のようにとれば成立する．

$$\epsilon(a) \le \frac{(1-\theta)^3}{128}|a|.$$

Apollonius の円 D_μ $(\,0 < \mu \le 1\,)$

$$D_\mu = \left\{ u \in \mathbb{C} \;\middle|\; \left|\frac{u - s_1}{u - s_2}\right| \le \mu \right\} = \{\, u \in \mathbb{C} \mid |u - c_\mu| \le \rho_\mu \,\},$$

$$c_\mu = \mathrm{mid}\, D_\mu = \frac{s_1 - \mu^2 s_2}{1 - \mu^2}, \qquad \rho_\mu = \mathrm{rad}\, D_\mu = \frac{\mu|s_1 - s_2|}{1 - \mu^2}.$$



Perron-Pringsheim の定理（証明）

以下，証明は 4 ステップに分けて行う．

1. 補題をひとつ用意．Apollonius の円 D_μ は μ がある範囲にあるとき，一次分数変換 $T_k^{(\lambda)}$ により縮められる．
2. $0 \in D_1$, $w^{(\lambda)} = T_0^{(\lambda)} \circ T_1^{(\lambda)} \circ \cdots (0)$ であるから，一次分数変換 $T_k^{(\lambda)}$ により D_1 がどんどん縮められることを示せばよい．ここでは，途中まで補題により Apollonius の円が縮められることを示す．
3. Step 2 の後は，別のメカニズムにより Apollonius の円が縮められる．
4. Step 2, Step 3 の結果を用いて，連分数族 $\mathscr{F}$ の一様収束を示す．

Step 1

補題

$$a \neq 0, \quad |a_k^{(\lambda)} - a| \leq \alpha |a|, \quad \alpha \leq \frac{(1-\theta)^2}{16\theta}.$$

このとき，次が成り立つような γ ($0 < \gamma < 1$) が存在する．

$$\nu := \frac{16\theta}{(1-\theta)^2}\alpha \leq \mu \leq 1 \ \Rightarrow \ T_k^{(\lambda)}(D_\mu) \subset D_{\gamma\mu} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, \forall \lambda \in \Lambda).$$

- μ ($\nu \leq \mu \leq 1$) に対して，一次分数変換 $T_k^{(\lambda)}$ は Apollonius の円 D_μ を縮める．
- 連分数族 $\mathscr{F}$ の一様収束を得るためには，ν はある程度小さい値でなければならない．ν が「ある程度小さい値」になるための条件を調べると，定理の条件 $\exists \epsilon(a) > 0$ s.t. $|a_k^{(\lambda)} - a| < \epsilon(a)$ を得るのである．

Perron-Pringsheim の定理（証明）

Step 2　$0 \in D_1$ である $\left(\because \dfrac{|0 - s_1|}{|0 - s_2|} = \theta < 1 \right)$.

よって，α が補題の条件 $\alpha \le (1-\theta)^2/16\theta$ を満たせば，補題より D_1 は連分数族 $\mathscr{F}$ の固有領域である．あとは次を示せばよい．

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{diam} T_{0,n}^{(\lambda)}(D_1) = 0 \quad (\lambda \in \Lambda \text{ について一様収束}).$$

記号の定義

$m \in \mathbb{N}$ とする．

$$D^{(\lambda,0)} = D_1, \quad D^{(\lambda,1)} = T_m^{(\lambda)}(D_1), \quad D^{(\lambda,2)} = T_{m-1,m}^{(\lambda)}(D_1),$$

$$D^{(\lambda,3)} = T_{m-2,m}^{(\lambda)}(D_1), \quad \ldots, D^{(\lambda,m+1)} = T_{0,m}^{(\lambda)}(D_1),$$

$$c_k^{(\lambda)} = \operatorname{mid} D^{(\lambda,k)} \ (D^{(\lambda,k)} \text{ の中心}), \quad \rho_k^{(\lambda)} = \operatorname{rad} D^{(\lambda,k)} \ (D^{(\lambda,k)} \text{ の半径}).$$

$$\gamma^l < \nu \le \gamma^{l-1}$$

なる l をとると，補題により $D^{(\lambda,1)}, \ldots, D^{(\lambda,l)}$ は順に次のように縮んでゆく．

$$D^{(\lambda,1)} \subset D_\gamma, \quad D^{(\lambda,2)} \subset D_{\gamma^2}, \quad \ldots, D^{(\lambda,l)} \subset D_{\gamma^l}.$$

その後，$D^{(\lambda,k)}$ は Step 3 で別のメカニズムにより縮んでゆく．

Step 3 $D^{(\lambda,l+1)},\ldots,D^{(\lambda,m+1)}$ は別のメカニズムにより縮んでいく．

はじめに，次が成り立つ．

$$D^{(\lambda,k)} \subset D_\nu \quad (\, l < k \le m+1\,).$$

実際，$D^{(\lambda,l)} \subset D_{\gamma^l} \subset D_\nu \subset D_{\gamma^{l-1}}$ であるから，補題より $\nu \le \mu \le 1$ なる μ に対し D_μ は $T_k^{(\lambda)}$ により $D_{\gamma\mu}$ 内に縮められることを用いて

$$\begin{aligned}
D^{(\lambda,l+1)} &= T_{m-l}^{(\lambda)}(D^{(\lambda,l)}) \subset T_{m-l}^{(\lambda)}(D_{\gamma^{l-1}}) \subset D_{\gamma^l} \subset D_\nu,\\
D^{(\lambda,l+2)} &= T_{m-l-1}^{(\lambda)}(D^{(\lambda,l+1)}) \subset T_{m-l-1}^{(\lambda)}(D_\nu) \subset D_{\gamma\nu} \subset D_\nu,\\
D^{(\lambda,l+3)} &= T_{m-l-2}^{(\lambda)}(D^{(\lambda,l+2)}) \subset T_{m-l-2}^{(\lambda)}(D_\nu) \subset D_{\gamma\nu} \subset D_\nu,\\
&\cdots
\end{aligned}$$

となる．これより，($c_k^{(\lambda)}, s_1 \in D^{(\lambda,k)} \subset D_\nu$ ($l < k \le m+1$) に注意して）

$$|c_k^{(\lambda)} - s_1| \le \rho_\nu, \quad \rho_k^{(\lambda)} \le \rho_\nu \quad (\, l < k \le m+1\,),$$

$$\rho_\nu = \mathrm{rad}\, D_\nu = \frac{\nu|s_1 - s_2|}{1-\nu^2}.$$

Perron-Pringsheim の定理（証明）

次に，$D^{(\lambda,k)}$ の半径 $\rho_k^{(\lambda)}$ について下記の漸化式が成り立つことが示される．

$$\rho_{k+1}^{(\lambda)} = \frac{|c_{k+1}^{(\lambda)}|}{|1+c_k^{(\lambda)}|}\rho_k^{(\lambda)}.$$

青字部分の分母・分子について，$D_k^{(\lambda)} \subset D_\nu$ ($k > l$) より次が成り立つ．

$$|1+c_k^{(\lambda)}| \geq |s_2| - \rho_\nu, \quad |c_{k+1}^{(\lambda)}| \leq |s_1| + \rho_\nu \quad (l < k \leq m+1),$$

$$\rho_\nu = \mathrm{rad}\, D_\nu = \frac{\nu|s_1 - s_2|}{1-\nu^2}.$$

実際，$s_{1,2}$ は $s^2 + s - a = 0$ の根であるから，根と係数の関係より $1 + s_1 = -s_2$ であり，

$$|1+c_k^{(\lambda)}| \geq |1+s_1| - |c_k^{(\lambda)} - s_1| \geq |s_2| - \rho_\nu,$$

$$|c_{k+1}^{(\lambda)}| \leq |c_{k+1}^{(\lambda)} - s_1| + |s_1| \leq |s_1| + \rho_\nu.$$

$$(\because \quad c_k^{(\lambda)}, s_1 \in D^{(\lambda,k)} \subset D_\nu, \quad c_{k+1}^{(\lambda)}, s_1 \in D^{(\lambda,k+1)} \subset D_\nu.)$$

$$\therefore \quad \rho_{k+1}^{(\lambda)} \leq \frac{|s_1| + \rho_\nu}{|s_2| - \rho_\nu}\rho_k^{(\lambda)} \quad (l < k \leq m).$$

Perron-Pringsheim の定理（証明）

Step 4　Step 3 の最後の不等式と，Step 2 の結果 $D^{(\lambda,l)} \subset D_{\gamma^l}$ より $\rho_l^{(\lambda)} \le \rho_{\gamma^l}$ であることを用いて，

$$\rho_{m+1}^{(\lambda)} \le \left(\frac{|s_1|+\rho_\nu}{|s_2|-\rho_\nu}\right)^{m-l} \rho_l^{(\lambda)} \le \left(\frac{|s_1|+\rho_\nu}{|s_2|-\rho_\nu}\right)^{m-l} \rho_{\gamma^l} \quad (\forall \lambda \in \Lambda).$$

ここで，l, γ は $\lambda \in \Lambda$ に依らないから，最右辺は $\lambda \in \Lambda$ に依らない．
したがって，もし

$$\frac{|s_1|+\rho_\nu}{|s_2|-\rho_\nu} < 1 \tag{1}$$

ならば，

$$\rho_{m+1}^{(\lambda)} = O\left[\left(\frac{|s_1|+\rho_\nu}{|s_2|-\rho_\nu}\right)^m\right] \to 0 \quad (\,m \to \infty,\ \lambda \in \Lambda \text{ について一様収束}\,)$$

となり，連分数族 $\mathscr{F}$ の一様収束が得られる
（だから ν は十分小さくなければならない）．

(1)，すなわち，$2\rho_\nu < |s_1| - |s_2|$ は次が成り立てば成立する．

$$\frac{2\nu}{1-\nu^2} < \frac{1-\theta}{1+\theta}. \tag{2}$$

Perron-Pringsheim の定理（証明）

(2) は例えば，次が成り立てば成立する．

$$\nu^2 \leq \frac{1}{2} \quad \& \quad 8\nu < 1 - \theta \tag{3}$$

$$\nu = \frac{16\theta}{(1-\theta)^2}\alpha$$

であったことを思い出して α に対する条件に書き直すと，
(3) は次が成り立てば成立する．

$$\alpha \leq \frac{(1-\theta)^3}{128}.$$

なお，これが成り立つとき，補題の条件 $\alpha \leq \dfrac{(1-\theta)^2}{16\theta}$ が成り立つことも簡単に示される．

以上により，定理において次のようにおけばよい．

$$\epsilon(a) \leq \frac{(1-\theta)^3}{128}|a|.$$

（定理の証明終わり）

連分数の収束速度

定理の証明から，$\epsilon \leq \dfrac{(1-\theta)^3}{128}|a|$ ならば，

$$\nu = \frac{16\theta}{(1-\theta)^2}\frac{\epsilon}{|a|}, \quad \rho_\nu = \frac{\nu|s_1 - s_2|}{1-\nu^2},$$

$$|w_m^{(\lambda)} - w^{(\lambda)}| = \mathrm{O}\left[\left(\frac{s_1+\rho_\nu}{s_2-\rho_\nu}\right)^m\right] \to 0 \quad (\, m \to \infty \text{ uniformly for } \lambda \in \Lambda\,).$$

ϵ を小さくとるほど，ν そして ρ_ν は小さくなり，$|(s_1+\rho_\nu)/(s_2-\rho_\nu)|$ は $\theta = |s_1/s_2|$ に近くなる．

したがって，Perron-Pringsheim の定理の系として，次が得られる．

連分数の収束速度

Perron-Pringsheim の定理の系

$$\mathscr{F} = \left\{ w^{(\lambda)} = \frac{a_0^{(\lambda)}}{|\,1} + \frac{a_1^{(\lambda)}}{|\,1} + \cdots \;\middle|\; \lambda \in \Lambda \right\} \quad \text{連分数族.}$$

について，ある複素数 $a \notin \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1/4 \}$ が存在して

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{(\lambda)} = a \quad （\lambda \in \Lambda \text{ について一様収束}）$$

ならば，任意の $\epsilon > 0$ に対し

$$|w_n^{(\lambda)} - w^{(\lambda)}| = \mathrm{O}((\theta + \epsilon)^n) \quad （\lambda \in \Lambda \text{ について一様}），$$

ここで，

$$\theta = \left| \frac{s_1}{s_2} \right|, \quad s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{a + \frac{1}{4}} \quad (\,|s_1| < |s_2|\,).$$

数値例

$$\pi = \frac{4|}{|1} + \frac{1^2|}{|3} + \frac{2^2|}{|5} + \frac{3^2|}{|7} + \cdots$$

$$= \frac{4|}{|1} + \frac{1^2/(1\cdot 3)|}{|1} + \frac{2^2/(3\cdot 5)|}{|1} + \frac{3^2/(5\cdot 7)|}{|1} + \cdots,$$

$$a_k = \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} \to a = \frac{1}{4}, \quad \theta = 0.172\ldots$$

上の連分数の第 n 近似分数を計算し誤差の n に対する変化を調べた.

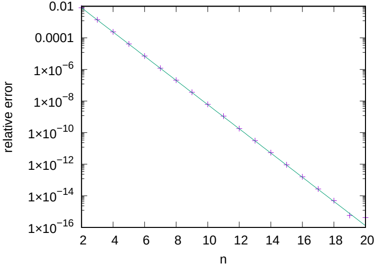
数値例

$$\pi = \frac{4|}{|1} + \frac{1^2|}{|3} + \frac{2^2|}{|5} + \frac{3^2|}{|7} + \cdots$$

$$= \frac{4|}{|1} + \frac{1^2/(1\cdot 3)|}{|1} + \frac{2^2/(3\cdot 5)|}{|1} + \frac{3^2/(5\cdot 7)|}{|1} + \cdots,$$

$$a_k = \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} \to a = \frac{1}{4}, \quad \theta = 0.172\ldots$$

上の連分数の第 n 近似分数を計算し誤差の n に対する変化を調べた．



$$誤差 = \begin{cases} O(0.171^n) & 実験 \\ O(0.172^n) & 理論. \end{cases}$$

理論誤差評価は数値実験結果とよく符合する．

まとめ

- （前回）次の形の連分数の収束解析をした．

$$\frac{a}{|1} + \frac{a}{|1} + \frac{a}{|1} + \cdots$$

指数関数的収束．

- （今回）次の形の連分数族に対し収束解析した．

$$\mathscr{F} = \left\{ \frac{a_0^{(\lambda)}}{|1} + \frac{a_1^{(\lambda)}}{|1} + \frac{a_2^{(\lambda)}}{|1} + \cdots \;\middle|\; \lambda \in \Lambda \right\}.$$

$a_k^{(\lambda)}$ がひとつの定数 a の近傍に留まるなら指数関数的（一様）収束．

- 収束のカギ：一次分数変換が Apollonius の円を縮める．
- 数値実験結果は理論誤差評価とよく符合する．

補遺：補題の証明

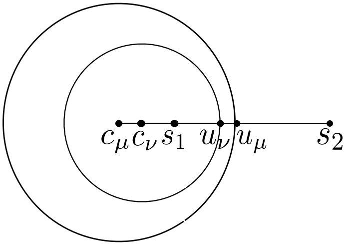
まず，次の 3 項目が成り立つことに注意する．

1. 円 D_μ の中心 c_μ は線分 $s_2 s_1$ を s_1 方向に延長した先にある．
2. 円 D_μ の周は次の点 u_μ で線分 $s_1 s_2$ と交わる．

$$u_\mu = \frac{s_1 + \mu s_2}{1+\mu}.$$

3. 2 円 D_μ, D_ν ($0 < \nu < \mu < 1$) の周は，2 点 u_μ, u_ν で最接近する．そして，

$$|u_\mu - u_\nu| = \frac{\mu - \nu}{(1+\mu)(1+\nu)} |s_1 - s_2| \geq \frac{\mu - \nu}{4} |s_1 - s_2|.$$



補遺：補題の証明

$T_a(u) = \dfrac{a}{1+u}$ とおくと $T_k^{(\lambda)}(u) = T_a(u) + \dfrac{a_k^{(\lambda)}}{1+u}$ であるから，

$$T_k^{(\lambda)}(D_\mu) = T_a(D_\mu) + \frac{a_k^{(\lambda)} - a}{1+D_\mu} = D_{\theta\mu} + \frac{a_k^{(\lambda)} - a}{a} D_{\theta\mu},$$

第 2 の等号で $\dfrac{1}{1+u} = \dfrac{1}{a} T_a(u)$ と $T_a(D_\mu) \subset D_{\theta\mu}$ を用いた
（動画「連分数はなぜ収束するか（1）」参照）．これより，$T_k^{(\lambda)}(D_\mu)$ は $D_{\theta\mu}$ からたかだか

$$\delta := \alpha \sup_{u \in D_{\theta\mu}} |u|$$

しかはみ出ない（仮定 $|a_k^{(\lambda)} - a| \leq \alpha |a|$ を用いた）．
$D_{\theta\mu} \subset D_\theta$, $0 \in \partial D_\theta$ であるから，

$$\delta \leq \alpha \operatorname{diam} D_\mu = 2\alpha\rho_\theta = \frac{2\alpha\theta}{1-\theta^2} |s_2 - s_1|. \tag{4}$$

補遺：補題の証明

円 $T_k^{(\lambda)}(D_\mu)$ は（$\gamma > \theta$ として）

$$\min \{ \ | \ u - u' \ | \ \ | \ u \in \partial D_{\gamma\mu}, \ u' \in \partial D_{\theta\mu} \ \} = |u_{\gamma\mu} - u_{\theta\mu}| \geq \delta \qquad (5)$$

ならば $D_{\gamma\mu}$ に含まれる．

$$|u_{\gamma\mu} - u_{\theta\mu}| = \frac{(\gamma - \theta)\mu}{(1 + \gamma\mu)(1 + \theta\mu)} |s_1 - s_2| \geq \frac{(\gamma - \theta)\mu}{4} |s_1 - s_2| \qquad (6)$$

(4), (6) より，

$$\frac{2\alpha\theta}{1 - \theta^2} \leq \frac{(\gamma - \theta)\mu}{4}$$

ならば (5) が成立する．そしてこれは，

$$\gamma = \frac{1 + \theta}{2}$$

とおけば（条件 $\nu \leq \mu \leq 1$ により）成立する．仮定 $\alpha \leq (1 - \theta)^2 / 16\theta$ は $\mu \leq \mu \leq 1$ を満たす μ が存在するための条件である． ■