楕円関数論 (12)
ふしぎな等式

緒方　秀教

電気通信大学　大学院情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻

2021 年 1 月

今回の目的

次の等式が成り立つ.

$$\frac{1^3}{e^{\sqrt{3}\pi}+1}-\frac{2^3}{e^{2\sqrt{3}\pi}-1}+\frac{3^3}{e^{3\sqrt{3}\pi}+1}-\frac{4^3}{e^{4\sqrt{3}\pi}-1}+\cdots=\frac{1}{240},$$

$$\frac{1^5}{e^{2\pi}-1}+\frac{2^5}{e^{4\pi}-1}+\frac{3^5}{e^{6\pi}-1}+\frac{4^5}{e^{8\pi}-1}+\cdots=\frac{1}{504}.$$

今回の目的

次の等式が成り立つ.

$$\frac{1^3}{e^{\sqrt{3}\pi}+1}-\frac{2^3}{e^{2\sqrt{3}\pi}-1}+\frac{3^3}{e^{3\sqrt{3}\pi}+1}-\frac{4^3}{e^{4\sqrt{3}\pi}-1}+\cdots=\frac{1}{240},$$

$$\frac{1^5}{e^{2\pi}-1}+\frac{2^5}{e^{4\pi}-1}+\frac{3^5}{e^{6\pi}-1}+\frac{4^5}{e^{8\pi}-1}+\cdots=\frac{1}{504}.$$

1. 「Eisenstein 級数」に関する公式から上の等式を導出する. 数値実験でも確認する.
2. 「Eisenstein 級数に関する公式」を楕円関数論により証明する.

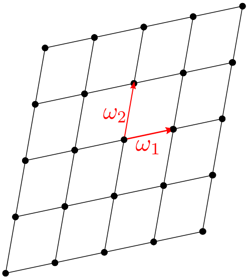
Eisenstein 級数

$\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C} - \{\,0\,\}$ ($\mathrm{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$)

$$\text{周期格子}\quad \Lambda = \{\, m\omega_1 + n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z} \,\},$$

$$\text{Eisenstein 級数}\quad G_{2k} = \sum_{\omega \in \Lambda - \{\,0\,\}} \frac{1}{\omega^{2k}} = \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^{2k}}$$

$$(\, k = 2, 3, \ldots \,).$$



Eisenstein 級数

Eisenstein 級数の「基本表式」

$$G_{2k} = \frac{2}{\omega_1^{2k}} \left\{ \zeta(2k) - \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} (2\pi)^{2k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2k-1} q^{2n}}{1-q^{2n}} \right\},$$

$$q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\omega_2/\omega_1}, \quad \zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} \quad \text{Riemann の zeta 関数.}$$

とくに, ($\zeta(4) = \pi^4/90$, $\zeta(6) = \pi^6/945$ を用いて)

$$G_4 = \frac{\pi^4}{45\omega_1^4} \left(1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 q^{2n}}{1-q^{2n}} \right),$$

$$G_6 = \frac{2\pi^6}{945\omega_1^6} \left(1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 q^{2n}}{1-q^{2n}} \right)$$

$$(g_2 = 60 G_4, \quad g_3 = 140 G_6).$$

- $\omega_2/\omega_1 = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$ のとき $G_4 = 0$.
- $\omega_2/\omega_1 = \mathrm{i}$ のとき $G_6 = 0$.

（証明）

- $\omega_2/\omega_1 = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$ のとき

$$
\begin{aligned}
G_4 &= \frac{1}{\omega_1^4} \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(m+n\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3})^4} = \frac{1}{\omega_1^4} \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(m-n+n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3})^4} \\
&= \frac{1}{\omega_1^4} \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(m+n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3})^4} = -\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}}{\omega_1^4} \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(m\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/3}+n)^4} \\
&= -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3} G_4, \quad \therefore \quad G_4 = 0.
\end{aligned}
$$

- 上と同様の計算により $\omega_2/\omega_1 = \mathrm{i}$ のとき $G_6 = 0$ が示される．

■

Eisenstein 級数

$\omega_2/\omega_1 = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$ のとき $q = -\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\sqrt{3}\pi/2}$．これを

$$G_4 = \frac{\pi^4}{45\omega_1^4}\left(1 + 240\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3 q^{2n}}{1 - q^{2n}}\right)$$

に代入して，

$$0 = 1 + 240\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3 \mathrm{e}^{-\sqrt{3}n\pi}}{1 - (-1)^n \mathrm{e}^{-\sqrt{3}n\pi}},$$

$$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1} n^3}{\mathrm{e}^{\sqrt{3}n\pi} + (-1)^{n-1}} = \frac{1}{240}.$$

Eisenstein 級数

$\omega_2/\omega_1 = \mathrm{i}$ のとき $q = \mathrm{e}^{-\pi}$. これを

$$G_6 = \frac{2\pi^6}{945\omega_1^6}\left(1 - 504\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5 q^{2n}}{1-q^{2n}}\right)$$

に代入して,

$$0 = 1 - 504\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5 \mathrm{e}^{-2n\pi}}{1-\mathrm{e}^{-2n\pi}},$$

$$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{\mathrm{e}^{2n\pi}-1} = \frac{1}{504}.$$

これで所望の等式が示された. ■

数値実験で検証

$$C_2 \equiv 240 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^3}{\mathrm{e}^{\sqrt{3}n\pi} + (-1)^{n-1}} = 1,$$

$$C_4 \equiv 504 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{\mathrm{e}^{2n\pi} - 1} = 1$$

が本当に成り立つか，数値計算して確かめた．

数値実験で検証

$$C_2 \equiv 240 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^3}{\mathrm{e}^{\sqrt{3}n\pi} + (-1)^{n-1}} = 1,$$

$$C_4 \equiv 504 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{\mathrm{e}^{2n\pi} - 1} = 1$$

が本当に成り立つか，数値計算して確かめた.

数値実験結果

- $C_2 = 1.00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00000.$
- $C_4 = 1.00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00000.$

確かに成立する.

Eisenstein 級数の「基本表式」の証明

Eisenstein 級数 $G_{2k} = \sum_{\omega\neq 0}\omega^{-2k}$ の基本表式

$$G_{2k} = \frac{2}{\omega_1^{2k}}\left\{\zeta(2k) - \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}(2\pi)^{2k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2k-1}q^{2n}}{1-q^{2n}}\right\},$$

$$q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\omega_2/\omega_1}, \quad \zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}$$

$$(\ k = 2, 3, \ldots\ ).$$

「ふしぎな等式」の導出にはこの「基本表式」が基本的であった.
これから,「基本表式」を楕円関数論により証明する.

Eisenstein 級数の「基本表式」の証明

（証明の方針）Weierstrass の zeta 関数 $\zeta(u)$ の Laurent 級数展開を二通りの方法で求めることにより証明する．

（第一の方法）Weierstrass の sigma 関数，zeta 関数．

$$\sigma(u) = u \prod_{\omega\in\Lambda-\{0\}} \left(1-\frac{u}{\omega}\right) \exp\left(\frac{u}{\omega}+\frac{u^2}{2\omega^2}\right),$$

$$\zeta(u) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\log\sigma(u) = \frac{1}{u} + \sum_{\omega\in\Lambda-\{0\}} \left(\frac{1}{u-\omega}+\frac{1}{\omega}+\frac{u}{\omega^2}\right).$$

sigma 関数はテータ関数 ϑ_1 を用いて次のように表される（「楕円関数論（１０）」参照）．

$$\sigma(u) = \frac{\omega_1}{\vartheta_1'} \exp\left(\frac{\eta_1}{2\omega_1}u^2\right) \vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_1}\middle|\tau\right) \quad \left(\begin{array}{c}\tau=\omega_2/\omega_1,\ \vartheta_1'=\vartheta_1'(0|\tau),\\ \eta_1=2\zeta(\omega_1/2)\end{array}\right).$$

ちなみに，テータ関数 ϑ_1 の定義は次の通りだった．

$$\vartheta_1(v|\tau) = 2q^{1/4}\sin\pi v\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}v})(1-q^{2n}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}v}),$$

$$\operatorname{Im}\tau>0, \quad q=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\tau}.$$

Eisenstein 級数の「基本表式」の証明

sigma 関数の ϑ_1 による表現から，zeta 関数に対する次の表現を得る．

$$\zeta(u) = \frac{\eta_1}{\omega_1}u + \frac{\pi}{\omega_1}\cot\left(\frac{\pi u}{\omega_1}\right) - \frac{2\pi\mathrm{i}}{\omega_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}u/\omega_1}}{1-q^{2n}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}u/\omega_1}} + \frac{2\pi\mathrm{i}}{\omega_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}u/\omega_1}}{1-q^{2n}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}u/\omega_1}}.$$

青字は等比級数の形である $\sum_{m=1}^{\infty}\alpha^m = \alpha/(1-\alpha)$ ($|\alpha|<1$).

$$\zeta(u) = \frac{\eta_1}{\omega_1}u + \frac{\pi}{\omega_1}\cot\left(\frac{\pi u}{\omega_1}\right) - \frac{2\pi\mathrm{i}}{\omega_1}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(q^{2n}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}u/\omega_1})^m + \frac{2\pi\mathrm{i}}{\omega_1}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(q^{2n}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}u/\omega_1})^m$$

（二重級数の和の順序を交換して）

Eisenstein 級数の「基本表式」の証明

$$
\begin{aligned}
\zeta(u) &= \frac{\eta_1}{\omega_1}u + \frac{\pi}{\omega_1}\cot\left(\frac{\pi u}{\omega_1}\right) \\
&\quad - \frac{2\pi\mathrm{i}}{\omega_1}\sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{e}^{2m\pi\mathrm{i}u/\omega_1}\sum_{n=1}^{\infty}q^{2mn} + \frac{2\pi\mathrm{i}}{\omega_1}\sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-2m\pi\mathrm{i}u/\omega_1}\sum_{n=1}^{\infty}q^{2mn} \\
&= \frac{\eta_1}{\omega_1}u + \frac{\pi}{\omega_1}\cot\left(\frac{\pi u}{\omega_1}\right) + \frac{4\pi}{\omega_1}\sum_{m=1}^{\infty}\sin\left(\frac{2m\pi}{\omega_1}u\right)\frac{q^{2m}}{1-q^{2m}}.
\end{aligned}
$$

$$
\pi\cot\pi z = \frac{1}{z} - 2\sum_{k=1}^{\infty}\zeta(2k)z^{2k-1}, \quad \sin z = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}z^{2k-1}
$$

を代入すれば（「補遺」参照），次の式を得る．

$$
\begin{aligned}
\zeta(u) &= \frac{1}{u} + \left\{\frac{\eta_1}{\omega_1} - 2\frac{\zeta(2)}{\omega_1^2} + \frac{8\pi^2}{\omega_1^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}}\right\}u \\
&\quad - 2\sum_{k=2}^{\infty}\left\{\frac{\zeta(2k)}{\omega_1^{2k}} - \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right)^{2k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2k-1}q^{2n}}{1-q^{2n}}\right\}u^{2k-1}.
\end{aligned}
$$

Eisenstein 級数の「基本表式」の証明

（第二の方法）zeta 関数の定義

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} + \sum_{\omega\neq 0}\left(\frac{1}{u-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{u}{\omega^2}\right)$$

からは次を得る.

$$\begin{aligned}
\zeta(u) &= \frac{1}{u} + \sum_{\omega\neq 0}\left\{-\frac{1}{\omega}\left(1-\frac{u}{\omega}\right)^{-1} + \frac{1}{\omega} + \frac{u}{\omega^2}\right\} \\
&= \frac{1}{u} + \sum_{\omega\neq 0}\left\{-\frac{1}{\omega}\left(1+\frac{u}{\omega}+\frac{u^2}{\omega^2}+\cdots\right) + \frac{1}{\omega} + \frac{u}{\omega^2}\right\} \\
&= \frac{1}{u} - \underbrace{\left(\sum_{\omega\neq 0}\frac{1}{\omega^3}\right)}_{0} u^2 - \left(\sum_{\omega\neq 0}\frac{1}{\omega^4}\right) u^3 - \cdots \\
&= \ldots,
\end{aligned}$$

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} - \sum_{k=2}^{\infty} G_{2k} u^{2k-1}, \quad G_{2k} = \sum_{\omega\neq 0}\frac{1}{\omega^{2k}}.$$

Eisenstein 級数の「基本表式」の証明

結局，zeta 関数に対して次の二通りの Laurent 級数展開を得た．

$$
\begin{aligned}
\zeta(u) &= \frac{1}{u} - \sum_{k=2}^{\infty} G_{2k} u^{2k-1} \\
&= \frac{1}{u} + \left\{ \frac{\eta_1}{\omega_1} - 2\frac{\zeta(2)}{\omega_1^2} + \frac{8\pi^2}{\omega_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}} \right\} u \\
&\quad - 2\sum_{k=2}^{\infty} \left\{ \frac{\zeta(2k)}{\omega_1^{2k}} - \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} \left(\frac{2\pi}{\omega_1} \right)^{2k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2k-1} q^{2n}}{1-q^{2n}} \right\} u^{2k-1}.
\end{aligned}
$$

u^{2k-1} ($k = 2, 3, \ldots$) の係数比較により，題意の「基本表式」を得る．

$$
G_{2k} = \frac{2}{\omega_1^{2k}} \left\{ \zeta(2k) - \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} (2\pi)^{2k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2k-1} q^{2n}}{1-q^{2n}} \right\} \quad (k = 2, 3, \ldots).
$$

Eisenstein 級数の「基本表式」の証明

ちなみに，u の係数 $(= 0)$ 比較により，

$$\frac{\eta_1}{\omega_1} = \frac{2}{\omega_1^2}\left\{\zeta(2) - (2\pi)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}}\right\} \quad \left(\eta_1 = 2\zeta\left(\frac{\omega_1}{2}\right)\right).$$

$$G_{2k} = \frac{2}{\omega_1^{2k}}\left\{\zeta(2k) - \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}(2\pi)^{2k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2k-1}q^{2n}}{1-q^{2n}}\right\}$$

$$(\, k = 2, 3, \ldots\,).$$

G_{2k} の基本表式で $k = 1$ とおくと η_1/ω_1 を与える．
Eisenstein 級数 $G_2 = \sum_{\omega \neq 0} \omega^{-2}$ は定義できないが，
η_1/ω_1 は何らかの意味で G_2 の代わりになっている量かもしれない．

まとめ

- 次のふたつのふしぎな等式が成り立つ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^3}{e^{\sqrt{3}n\pi} + (-1)^{n-1}} = \frac{1}{240}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{e^{2n\pi} - 1} = \frac{1}{504}.$$

- 証明の道具は次のふたつ.
  - Eisenstein 級数.
  - Weierstrass の楕円関数（とくに zeta 関数）.

補遺：$\pi\cot\pi z$ の公式

$$\pi\cot\pi z = \frac{1}{z} - 2\sum_{k=1}^{\infty}\zeta(2k)z^{2k-1}, \quad \zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}} \quad (\, k = 1, 2, \ldots\,).$$

（証明）次の公式から出発する．

$$\pi\cot\pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}\frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

$$\begin{aligned}
\pi\cot\pi z &= \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{n^2}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)^{-1} \\
&= \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{n^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{n^{2k}} \\
&= \frac{1}{z} - \sum_{k=0}^{\infty}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^{2(k+1)}}\right\}z^{2k+1} \\
&= \frac{1}{z} - 2\sum_{k=1}^{\infty}\zeta(2k)z^{2k-1}.
\end{aligned}$$