# 楕円関数論 (13)
# Eisenstein 級数の関係式と整数論的公式


緒方　秀教

電気通信大学　大学院情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻


2021 年 1 月 6 日（水）

# 今回の内容

- （定義）楕円関数：二重周期性をもつ有理型関数.

極を持たない楕円関数は定数関数に限る.

- これにより，楕円関数に対する様々な公式，定理が得られた.
- 今回は，楕円関数に対する上記の性質より，Eisenstein 級数

$$G_{2k} = \sum_{\omega \neq 0} \frac{1}{\omega^{2k}} \quad (\, k = 2, 3, \ldots \,)$$

  に対しある関係式が得られることを示す.
- さらに，その Eisenstein 級数の関係式から，ある整数論的公式を導出する.

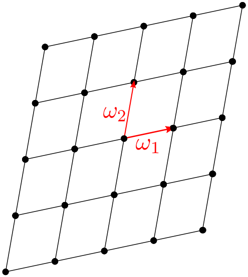
## 周期格子，Eisenstein 級数

$\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C} - \{\,0\,\}$ ( $\mathrm{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$ )

$$\text{周期格子} \quad \Lambda = \{\, m\omega_1 + n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z} \,\},$$

$$\text{Eisenstein 級数} \quad G_{2k} = \sum_{\omega \in \Lambda - \{\,0\,\}} \frac{1}{\omega^{2k}} = \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^{2k}}$$

$$(\, k = 2, 3, \ldots \,).$$



# Weierstrass の $\wp$ 関数とその微分方程式

**Weierstrass の $\wp$ 関数**

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{\omega\in\Lambda-\{0\}} \left( \frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

- 2 位の楕円関数，周期 $\omega_1, \omega_2$.
- $u \equiv 0 \mod \Lambda$ に 2 位の極をもつ.

**$\wp(u)$ が満たす微分方程式**

$$\wp'(u)^2 = 4\wp(u)^3 - g_2\wp(u) - g_3,$$

$$g_2 = 60G_4 = 60\sum_{\omega\neq 0}\frac{1}{\omega^4}, \quad g_3 = 140G_6 = 140\sum_{\omega\neq 0}\frac{1}{\omega^6}.$$

# $\wp(u)$ の微分方程式の導出

微分方程式 $\wp'(u)^2 = 4\wp(u)^3 - g_2\wp(u) - g_3$ の導出.
楕円関数の基本的性質を使った.

極を持たない楕円関数は定数関数に限る.

$\wp(u)$ の Laurent 級数展開.

$$
\begin{aligned}
\wp(u) &= \frac{1}{u^2} + \sum_{\omega\neq0}\left(\frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right) \\
&= \frac{1}{u^2} + \sum_{\omega\neq0}\left(\frac{1}{\omega^2}\left(1-\frac{u}{\omega}\right)^{-2} - \frac{1}{\omega^2}\right) \\
&= \frac{1}{u^2} + \sum_{\omega\neq0}\left(\frac{1}{\omega^2}\left(1+2\frac{u}{\omega}+3\frac{u^2}{\omega^2}+\cdots\right) - \frac{1}{\omega^2}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\wp(u) = \frac{1}{u^2} + 3G_4u^2 + 5G_6u^4 + 7G_8u^6 + \cdots .
$$

# $\wp(u)$ の微分方程式の導出

$$
\begin{aligned}
\wp(u) &= \frac{1}{u^2} + 3G_4 u^2 + 5G_6 u^4 + 7G_8 u^6 + \cdots, \\
\wp'(u) &= -\frac{2}{u^3} + 6G_4 u + 20G_6 u^3 + 42G_8 u^4 + \cdots, \\
\wp'(u)^2 &= \left(-\frac{2}{u^3} + 6G_4 u + 20G_6 u^3 + 42G_8 u^4 + \cdots\right)^2 \\
&= \frac{4}{u^6} - 24G_4 \frac{1}{u^2} - 80G_6 + \mathrm{O}(u^2), \\
\wp'(u)^2 - 4\wp(u)^3 &= -60G_4 \frac{1}{u^2} - 140G_6 + \mathrm{O}(u^2), \\
\wp'(u)^2 - 4\wp(u)^3 + 60G_4\wp(u) + 140G_6 &= \mathrm{O}(u^2).
\end{aligned}
$$

左辺は楕円関数（周期 $\omega_1, \omega_2$）であり，極はあるとすれば $u \equiv 0 \mod \Lambda$ に限る．
ところが，右辺 $= \mathrm{O}(u^2)$ であり，$u \equiv 0$ に極を持ち得ない．
よって，左辺は極をもたない楕円関数であるから定数関数である．
右辺 $= \mathrm{O}(u^2)$ により左辺 $= 0$.

$$
\therefore \quad \wp'(u)^2 - 4\wp(u)^3 + g_2\wp(u) + g_3 = 0, \quad g_2 = 60G_4, \quad g_3 = 140G_6.
$$

# ひとつの疑問

ところで，前頁の計算によれば

$$\wp'(u)^2 - 4\wp(u)^3 + g_2\wp(u) + g_3 = a_1 u^2 + a_2 u^4 + \cdots$$

であるが，両辺 $= 0$ ということは，右辺の係数 $a_1, a_2, \ldots$ は全部ゼロ !?

# ひとつの疑問

ところで，前頁の計算によれば

$$\wp'(u)^2 - 4\wp(u)^3 + g_2\wp(u) + g_3 = a_1 u^2 + a_2 u^4 + \cdots$$

であるが，両辺 $= 0$ ということは，右辺の係数 $a_1, a_2, \ldots$ は全部ゼロ !?

右辺のベキ級数をちゃんと計算してみる．

$$\begin{aligned} &\wp'(u)^2 - 4\wp(u)^3 + g_2\wp(u) + g_3 \\ &= (108G_4^2 - 252G_8)u^2 + (180G_4G_6 - 396G_{10})u^4 + \cdots \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$108G_4^2 - 252G_8 = 0, \quad 180G_4G_6 - 396G_{10} = 0, \quad \ldots$$

# ひとつの疑問

ところで，前頁の計算によれば

$$\wp'(u)^2 - 4\wp(u)^3 + g_2\wp(u) + g_3 = a_1 u^2 + a_2 u^4 + \cdots$$

であるが，両辺 $= 0$ ということは，右辺の係数 $a_1, a_2, \ldots$ は全部ゼロ !?

右辺のベキ級数をちゃんと計算してみる．

$$\begin{aligned}
&\wp'(u)^2 - 4\wp(u)^3 + g_2\wp(u) + g_3 \\
&= (108\,G_4^2 - 252\,G_8)u^2 + (180\,G_4 G_6 - 396\,G_{10})u^4 + \cdots \\
&= 0, \\
&108\,G_4^2 - 252\,G_8 = 0, \quad 180\,G_4 G_6 - 396\,G_{10} = 0, \quad \ldots
\end{aligned}$$

$$G_8 = \frac{3}{7} G_4^2, \quad G_{10} = \frac{5}{11} G_4 G_6, \quad \ldots$$

# Eisenstein 級数 $G_{2k}$ に対する漸化式

一般の Eisenstein 級数 $G_{2k}$ に対する関係式を求める．

# Eisenstein 級数 $G_{2k}$ に対する漸化式

一般の Eisenstein 級数 $G_{2k}$ に対する関係式を求める．
$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$ を微分して得られる

$$\wp''(u) = 6\wp(u)^2 - \frac{g_2}{2} = 6\wp(u)^2 - 30G_4$$

を利用するほうがラク.

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k u^{2k}, \quad c_k = (2k+1)G_{2k+2}$$

を代入して係数比較することにより，

# Eisenstein 級数 $G_{2k}$ に対する漸化式

一般の Eisenstein 級数 $G_{2k}$ に対する関係式を求める．
$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$ を微分して得られる

$$\wp''(u) = 6\wp(u)^2 - \frac{g_2}{2} = 6\wp(u)^2 - 30G_4$$

を利用するほうがラク．

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k u^{2k}, \quad c_k = (2k+1)G_{2k+2}$$

を代入して係数比較することにより，

**Eisenstein 級数 $G_{2k}$ に対する漸化式**

$$\{(k+1)(2k+1) - 6\}c_{k+1} = 3\sum_{i+j=k} c_i c_j \quad (\, k = 2, 3, \ldots\,),$$

$$c_k = (2k+1)G_{2k+2} \quad (\, k = 1, 2, \ldots\,).$$

# Eisenstein 級数 $G_{2k}$ は $g_2, g_3$ で表される

$$\{(k+1)(2k+1)-6\}c_{k+1} = 3\sum_{i+j=k} c_i c_j \quad (\ k = 2, 3, \ldots\ ),$$

$$c_k = (2k+1)G_{2k+2} \quad (\ k = 1, 2, \ldots\ ).$$

$$\Downarrow$$

Eisenstein 級数

$$G_{2k} = \sum_{\omega \in \Lambda - \{\ 0\ \}} \frac{1}{\omega^{2k}} \quad (\ k = 2, 3, \ldots\ )$$

は $g_2(=60G_4), g_3(=140G_6)$ の有理数係数多項式で表される.

# Eisenstein 級数 $G_{2k}$ は $g_2, g_3$ で表される

- $k=2$

$$c_3 = \frac{1}{3}c_1^2, \quad G_8 = \frac{3}{7}G_4^2 = \frac{3\cdot 60^2}{7}g_2^3.$$

- $k=3$

$$c_4 = \frac{3}{11}c_1c_2, \quad G_{10} = \frac{5}{11}G_4G_6 = \frac{5\cdot 60\cdot 140}{11}g_2g_3.$$

- $k=4$

$$13c_5 = 2c_1c_3 + c_2^2 = \frac{2}{3}c_1^3 + c_2,$$

$$G_{12} = \frac{18}{143}G_4^3 + \frac{25}{143}G_6^2 = \frac{18\cdot 60^3}{143}g_2^3 + \frac{25\cdot 140^2}{143}g_3^2.$$

**整数論的関数**

$$\sigma_k(n) \equiv \sum_{d|n} d^k \quad (\, n, k \in \mathbb{N} \,),$$

$d|n \quad d$ は $n$ を割り切る,

$\sum_{d|n} \quad n$ の約数 $d$ についての和.

（例）
$$\sigma_k(2) = 1^k + 2^k,$$
$$\sigma_k(4) = 1^k + 2^k + 4^k,$$
$$\sigma_k(6) = 1^k + 2^k + 3^k + 6^k, \ \text{etc.}$$

# Eisenstein 級数から得られる整数論的公式

$$\sigma_k(n) \equiv \sum_{d|n} d^k \quad (\, n, k \in \mathbb{N}\,),$$

$d|n$　$d$ は $n$ を割り切る,

$\sum_{d|n}$　$n$ の約数 $d$ についての和.

**Eisenstein 級数の関係式から得られる整数論的公式**

$$120 \sum_{l=1}^{n-1} \sigma_3(l)\sigma_3(n-l) + \sigma_3(n) = \sigma_7(n),$$

$$21\sigma_5(n) - 10\sigma_3(n) + 5040 \sum_{l=1}^{n-1} \sigma_3(l)\sigma_5(n-l) = 11\sigma_9(n).$$

# Eisenstein 級数から得られる整数論的公式（証明）

まず，Eisenstein 級数の「基本表式」（動画「楕円関数論（１２）」参照）

$$G_{2k} = \frac{2}{\omega_1^{2k}} \left\{ \zeta(2k) - \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} (2\pi)^{2k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2k-1} q^{2n}}{1 - q^{2n}} \right\} \quad (\, k = 2, 3, \ldots ),$$

$$q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\omega_2/\omega_1}, \quad \zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}.$$

を少し書き直す．青字部分を変形する．

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2k-1} q^{2n}}{1 - q^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k-1} \sum_{m=1}^{\infty} q^{2mn} \quad \text{（等比級数）}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d|n} d^{2k-1} q^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) q^{2n}.$$

# Eisenstein 級数から得られる整数論的公式

**Eisenstein 級数の基本表式**

$$G_{2k} = \frac{2}{\omega_1^{2k}}\left\{\zeta(2k) - \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}(2\pi)^{2k}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{2k-1}(n)q^{2n}\right\} \quad (\,k = 2, 3, \dots\,),$$

$$q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\omega_2/\omega_1}, \quad \sigma_{2k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{2k-1}.$$

# Eisenstein 級数から得られる整数論的公式

$$G_4 = \frac{\pi^4}{45\omega_1^4}\left(1 + 240\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)q^{2n}\right),$$
$$G_8 = \frac{\pi^8}{4725\omega_1^8}\left(1 + 480\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_7(n)q^{2n}\right).$$

$G_8 = \dfrac{3}{7}G_4^2$ より

$$\left(1 + 240\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)q^{2n}\right)^2 = 1 + 480\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_7(n)q^{2n}.$$

$q^{2m}$ ( $m = 2, 3, \ldots$ ) の係数を比較して，

$$120\sum_{l=1}^{n-1}\sigma_3(l)\sigma_3(n-l) + \sigma_3(n) = \sigma_7(n) \quad ( n = 2, 3, \ldots ).$$

# Eisenstein 級数から得られる整数論的公式

同様にして，$G_{10} = \dfrac{5}{11} G_4 G_6$ から次を得る．

$$\left(1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^{2n}\right)\left(1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) q^{2n}\right) = 1 - 264 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_9(n) q^{2n}.$$

$q^{2m}$ ( $m = 2, 3, \ldots$ ) の係数を比較して，

$$21\sigma_5(n) - 10\sigma_3(n) + 5040 \sum_{l=1}^{n-1} \sigma_3(l)\sigma_5(n-l) = 11\sigma_9(n) \quad ( n = 2, 3, \ldots ).$$

# 確認

$$120\sum_{l=1}^{n-1}\sigma_3(l)\sigma_3(n-l)+\sigma_3(n)=\sigma_7(n)\quad (\,n=2,3,\ldots\,).$$

- $n=2.$

$$120\sigma_3(1)^2+\sigma_3(2)=\sigma_7(2).$$

（左辺）　$\sigma_3(1)=1,\quad \sigma_3(2)=1^3+2^3=9$ により

左辺 $=120+9=129.$

（右辺）　$\sigma_7(2)=1^7+2^7=129.$

- $n=3.$

$$2\cdot 120\sigma_3(1)\sigma_3(2)+\sigma_3(3)=\sigma_7(3).$$

（左辺）　$\sigma_3(1)=1,\quad \sigma_3(2)=9,\quad \sigma_3(3)=1^3+3^3=28$ により

左辺 $=2\cdot 120\cdot 9+28=2188.$

（右辺）　$\sigma_7(3)=1^7+3^7=2188.$

# 確認

$$120 \sum_{l=1}^{n-1} \sigma_3(l)\sigma_3(n-l) + \sigma_3(n) = \sigma_7(n) \quad (\, n = 2, 3, \ldots).$$

$n = 4 \sim 10$ について PC 計算で確認した.

l.h.s.:左辺 (left-hand side), r.h.s.:右辺 (right-hand side).

n = 4
l.h.s.: 120*( 1*28+ 9*9+ 28*1)+ 73 = 16513
r.h.s.: 16513
n = 5
l.h.s.: 120*( 1*73+ 9*28+ 28*9+ 73*1)+ 126 = 78126
r.h.s.: 78126
n = 6
l.h.s.: 120*( 1*126+ 9*73+ 28*28+ 73*9+ 126*1)+ 252 = 282252
r.h.s.: 282252

# 確認

n = 7
l.h.s.: 120*( 1*252+ 9*126+ 28*73+ 73*28+ 126*9+ 252*1)+ 344
= 823544
r.h.s.: 823544
n = 8
l.h.s.: 120*( 1*344+ 9*252+ 28*126+ 73*73+ 126*28+ 252*9
+ 344*1)+ 585 = 2113665
r.h.s.: 2113665
n = 9
l.h.s.: 120*( 1*585+ 9*344+ 28*252+ 73*126+ 126*73+ 252*28
+ 344*9+ 585*1)+ 757 = 4785157
r.h.s.: 4785157
n = 10
l.h.s.: 120*( 1*757+ 9*585+ 28*344+ 73*252+ 126*126+ 252*73
+ 344*28+ 585*9+ 757*1)+1134 = 10078254
r.h.s.: 10078254

確かに題意の等式が成立する.

# 確認

$$21\sigma_5(n) - 10\sigma_3(n) + 5040\sum_{l=1}^{n-1}\sigma_3(l)\sigma_5(n-l) = 11\sigma_9(n) \quad (\, n = 2, 3, \ldots\,).$$

n = 2
l.h.s.: 21* 33 - 10*9 + 5040*( 1*1) = 5643
r.h.s.: 11*513 =5643
n = 3
l.h.s.: 21* 244 - 10*28 + 5040*( 1*33+ 9*1) = 216524
r.h.s.: 11*19684 =216524
n = 4
l.h.s.: 21*1057 - 10*73 + 5040*( 1*244+ 9*33+ 28*1) = 2889227
r.h.s.: 11*262657 = 2889227
n = 5
l.h.s.: 21*3126 - 10*126 + 5040*( 1*1057+ 9*244 + 28*33+ 73*1)
= 21484386
r.h.s.: 11*1953126 =21484386
n = 6
l.h.s.: 21*8052 - 10*252 + 5040*( 1*3126+ 9*1057+ 28*244 + 73*33
+ 126*1) = 111076812, r.h.s.: 11*10097892 =111076812

# 確認

n = 7

l.h.s.: 21*16808 - 10*344 + 5040*( 1*8052+ 9*3126+ 28*1057
+ 73*244+ 126*33+ 252*1) = 443889688

r.h.s.: 11*40353608 = 443889688

n = 8

l.h.s.: 21*33825 - 10*585 + 5040*( 1*16808+ 9*8052+ 28*3126
+ 73*1057+ 126*244+ 252*33+ 344*1) = 1479284235

r.h.s.: 11*134480385 = 1479284235

n = 9

l.h.s.: 21*59293 - 10*757 + 5040*( 1*33825+ 9*16808+ 28*8052
+ 73*3126+ 126*1057+ 252*244+ 344*33+ 585*1) = 4261841903

r.h.s.: 11*387440173 = 4261841903

n = 10

l.h.s.: 21*103158 - 10*1134 + 5040*( 1*59293+ 9*33825+ 28*16808
+ 73*8052+ 126*3126+ 252*1057+ 344*244+ 585*33+ 757*1)
= 11021490018

r.h.s.: 11*1001953638 = 11021490018

確かに題意の等式が成立する．

# まとめ

- Eisenstein 級数についてある関係式が成立する．
  これは楕円関数論の性質から得られる．

  極のない楕円関数は定数関数に限る．

- Eisenstein 級数は $g_2, g_3$ の有理数係数多項式で表される．
- （整数論的公式）$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$ に対して次の公式が成り立つ．

$$120 \sum_{l=1}^{n-1} \sigma_3(l)\sigma_3(n-l) + \sigma_3(n) = \sigma_7(n),$$

$$21\sigma_5(n) - 10\sigma_3(n) + 5040 \sum_{l=1}^{n-1} \sigma_3(l)\sigma_5(n-l) = 11\sigma_9(n).$$

これは Eisenstein 級数の満たす関係式から導出される．