

楕円関数論 (14)

振り子の幾何学と加法定理

緒方 秀教

電気通信大学 大学院情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻

2021 年 1 月 12 日 (火)

振り子の運動

振り子（質量 m , 長さ l ）の運動.

P : 振り子の位置（時刻 t ）,

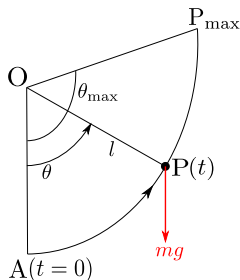
θ : 振れの角,

A : 最下点（時刻 $t = 0$ ）,

$P_{\max}$: 最上点（ $\theta_{\max}$ ）.

運動方程式の解

（動画「楕円関数論（1）」参照）



$$\theta(t) = 2 \arcsin[k \operatorname{sn}(\omega_0 t; k)], \quad \text{母数 } k = \sin \frac{\theta_{\max}}{2}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

振幅関数 $\varphi = \operatorname{am}(\omega_0 t; k) := \arcsin \operatorname{sn}(\omega_0 t; k) \quad (\sin \varphi = \operatorname{sn}(\omega_0 t; k)),$

$\Downarrow$

$$\sin \varphi = k \sin \frac{\theta}{2}.$$

Jacobi 楕円関数の加法定理

cn の加法定理

$$\operatorname{cn}(u+v) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} v - \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v - \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}.$$

上の式から当初得られた加法定理を導出することができる.

$$\operatorname{cn}(u+v) = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}.$$

今回やること

cn の加法定理を, 楕円関数の初等幾何学および振り子の物理学の観点から導出する.

参考文献

- 戸田盛和: 楕円関数入門, 日本評論社 (2001 年).
(もともとは Jacobi の証明)

加法定理の証明 (1/3)

3 段階に分けて証明する.

Step 1/3 母数 k , 振幅関数 $\varphi = \text{am}(\omega_0 t; k)$ の幾何学的表示.

$$AP''_{\max} = AP_{\max} \sin \frac{\theta_{\max}}{2}$$

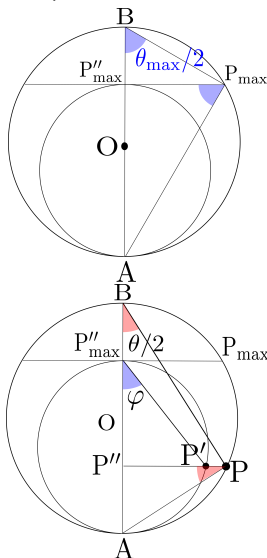
$$= AB \sin^2 \frac{\theta_{\max}}{2},$$

$$k^2 = \sin^2 \frac{\theta_{\max}}{2} = \frac{AP''_{\max}}{AB}.$$

$$AP'' = AP \sin \frac{\theta}{2} = AB \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

$$AP'' = AP''_{\max} \sin^2 \varphi = k^2 AB \sin^2 \varphi.$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = k \sin \varphi \quad (\sin \varphi = \text{sn}(\omega_0 t; k)).$$



加法定理の証明 (2/3)

Step 2/3

P : 時刻 t での質点の位置,

Q : 時刻 $t'(>t)$ での質点の位置.

2 点 $P_{\max}$, $P'''_{\max}$ を通り, PQ に接する円 $\mathcal{C}$ (中心 C) を描く.

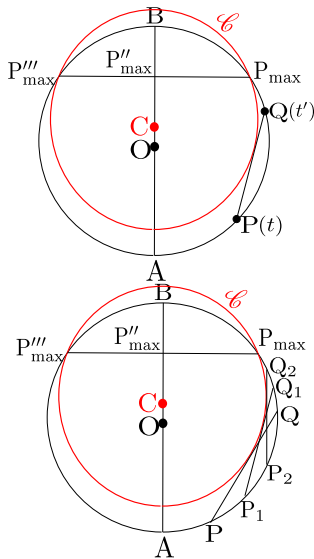
時間差 $\tau = t' - t$ の 2 点对

$P_1(t + \Delta t_1)$, $Q_1(t' + \Delta t_1)$,

$P_2(t + \Delta t_2)$, $Q_2(t' + \Delta t_2)$, ...

をとると,

円 $\mathcal{C}$ は直線群 $P_1Q_1, P_2Q_2, \dots$ の包絡線
になっていることをこれから示す.



加法定理の証明 (2/3)

R : 円 $\mathcal{C}$ と PQ との接点.

まず, PR, QR の長さを求める.

$$PR^2 = PC^2 - CR^2$$

$$= PC^2 - P_{\max}C^2,$$

$$PC^2 = |\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC}|^2$$

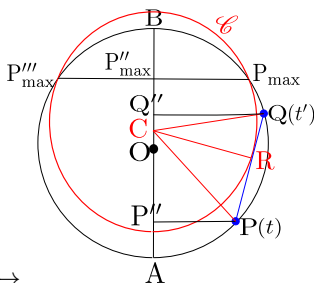
$$= OP^2 + OC^2 - 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OP},$$

$$P_{\max}C^2 = OP_{\max}^2 + OC^2 - 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OP_{\max}}.$$

OP = OP_{max} に注意して,

$$PR^2 = 2\overrightarrow{OC} \cdot (\overrightarrow{OP_{\max}} - \overrightarrow{OP}) = 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{PP_{\max}} = 2OC \cdot P''P_{\max},$$

$$\therefore PR = \sqrt{2OC \cdot P''P_{\max}}. \quad \text{同様に} \quad QR = \sqrt{2OC \cdot Q''P_{\max}}.$$



加法定理の証明 (2/3)

PQ, P_1Q_1 の交点 R' は, 極限 $P_1 \rightarrow P, Q_1 \rightarrow Q$ で点 R に近づく.

• •

 v_P : P での質点の速さ, v_Q : Q での質点の速さ.

エネルギー保存則より,

$$v_P = \sqrt{2gP''P''_{\max}}, \quad v_Q = \sqrt{2gQ''P''_{\max}},$$

そして $PP_1 : QQ_1 = v_P : v_Q$.

$\triangle PP_1R'$ と $\triangle Q_1QR'$ は相似だから,

$$\lim_{P_1 \rightarrow P} \frac{PR'}{QR'} = \frac{PP_1}{QQ_1} = \frac{v_P}{v_Q} = \frac{\sqrt{P''P''_{\max}}}{\sqrt{Q''P''_{\max}}} = \frac{PR}{QR}$$

(最後で前頁の結果を用いた),

$$\therefore \lim_{P_1 \rightarrow P} R' = R.$$

