楕円関数論 (14)
振り子の幾何学と加法定理

緒方　秀教

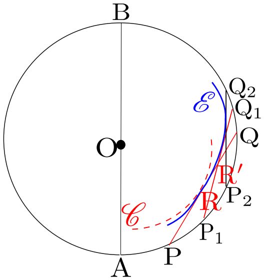
電気通信大学　大学院情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻

2021 年 1 月 12 日（火）

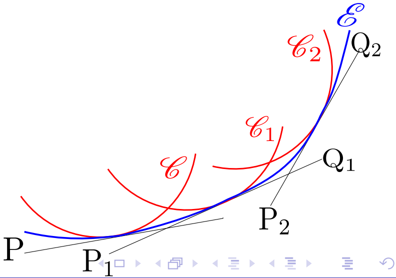
加法定理の証明 (2/3)

$\mathscr{E}$: 直線群 PQ, $\mathrm{P_1Q_1}$, $\mathrm{P_2Q_2}$, $\ldots$ の包絡線.

- 包絡線 $\mathscr{E}$ は点 $\lim \mathrm{R}' = \mathrm{R}$ で直線 PQ に接する.
- 円 $\mathscr{C}$ は点 R で直線 PQ に接する.
- よって，円 $\mathscr{C}$ は包絡線 $\mathscr{E}$ にも点 R で接する.



- 直線 PQ に対して円 $\mathscr{C}$ を作ったのと同様にして，直線 $\mathrm{P_1Q_1}$, $\mathrm{P_2Q_2}$, $\ldots$ に対してそれぞれ円 $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\ldots$ を作る.
- $\mathscr{E}$ は円 $\mathscr{C}, \mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \ldots$ の包絡線でもある.



加法定理の証明 (2/3)

- ところが，2 点 $\mathrm{P_{max}}, \mathrm{P'''_{max}}$ を通る円群は包絡線をなさない．
- ありうる可能性：

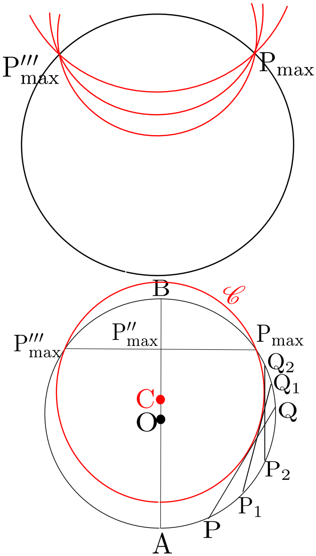
$$\mathscr{C} = \mathscr{C}_1 = \mathscr{C}_2 = \cdots,$$
$$\mathscr{E} = \mathscr{C}.$$

ゆえに，円 $\mathscr{C}$ は直線群

$$\mathrm{PQ}, \mathrm{P_1Q_1}, \mathrm{P_2Q_2}, \ldots \qquad (1)$$

の包絡線である．
直線群 (1)…時間差 τ の 2 点対．

∴ 円 $\mathscr{C}$ の中心 C は時間差 τ にのみ依る．



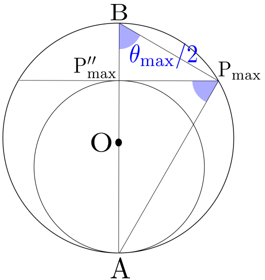
加法定理の証明 (2/3)

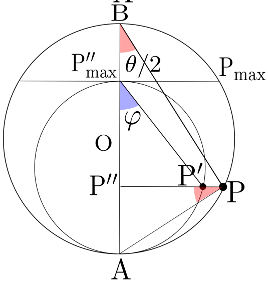
Step 3 に進む前に，下の図を復習する．

$$k^2 = \sin^2 \frac{\theta_{\max}}{2} = \frac{\mathrm{AP}''_{\max}}{\mathrm{AB}}.$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = k \sin \varphi$$

$$(\sin \varphi = \mathrm{sn}(\omega_0 t; k)).$$

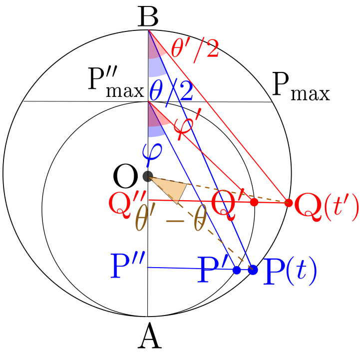




Step 3/3

直接計算により

$$\mathrm{PQ} = 2l \sin\frac{\theta' - \theta}{2} \quad (l：大円の半径).$$



一方,

$$\begin{aligned}
\mathrm{PQ} &= \mathrm{PR} + \mathrm{RQ} \\
&= \sqrt{2\mathrm{OC}\cdot \mathrm{P}''\mathrm{P}''_{\max}} + \sqrt{2\mathrm{OC}\cdot \mathrm{Q}''\mathrm{P}''_{\max}}, \\
\mathrm{P}''\mathrm{P}''_{\max} &= \mathrm{P}'\mathrm{P}''_{\max}\cos\varphi = \mathrm{AP}''_{\max}\cos^2\varphi, \\
\mathrm{Q}''\mathrm{P}''_{\max} &= \mathrm{Q}'\mathrm{P}''_{\max}\cos\varphi' = \mathrm{AP}''_{\max}\cos^2\varphi', \\
\mathrm{PQ} &= \sqrt{2\mathrm{OC}\cdot \mathrm{AP}''_{\max}}(\cos\varphi + \cos\varphi') \\
&= 2k\sqrt{l\cdot \mathrm{OC}}(\cos\varphi + \cos\varphi')
\end{aligned}$$

($\mathrm{AP}''_{\max} = k^2\mathrm{AB}$ を思い出す),

$$\therefore \quad \frac{\sin[(\theta' - \theta)/2]}{\cos\varphi + \cos\varphi'} = f(\tau) \left(:= k\sqrt{\frac{\mathrm{OC}}{l}} \right)$$

時間差 $\tau = t' - t$ のみに依る量.

$$\frac{\sin[(\theta' - \theta)/2]}{\cos\varphi + \cos\varphi'} = f(\tau).$$

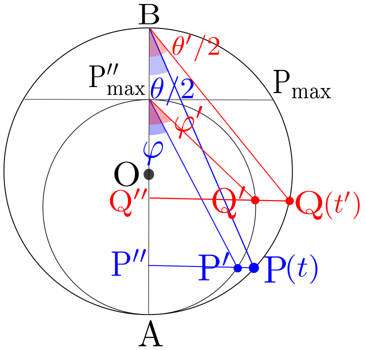
振り子の運動方程式の解より，

$$\sin\frac{\theta}{2} = k\sin\varphi = k\,\mathrm{sn}\,\omega_0 t,$$

$$\sin\frac{\theta'}{2} = k\sin\varphi' = k\,\mathrm{sn}\,\omega_0 t',$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \mathrm{dn}\,\omega_0 t, \quad \cos\frac{\theta'}{2} = \mathrm{dn}\,\omega_0 t',$$

$$\cos\varphi = \mathrm{cn}\,\omega_0 t, \quad \cos\varphi' = \mathrm{cn}\,\omega_0 t'.$$



$$\frac{\mathrm{sn}\,\omega_0 t'\,\mathrm{dn}\,\omega_0 t - \mathrm{sn}\,\omega_0 t\,\mathrm{dn}\,\omega_0 t'}{\mathrm{cn}\,\omega_0 t + \mathrm{cn}\,\omega_0 t'} = f(\tau)$$ 時間差 $\tau = t' - t$ のみに依る量.

加法定理の証明 (3/3)

$$\frac{\mathrm{sn}\,\omega_0 t' \,\mathrm{dn}\,\omega_0 t - \mathrm{sn}\,\omega_0 t \,\mathrm{dn}\,\omega_0 t'}{\mathrm{cn}\,\omega_0 t + \mathrm{cn}\,\omega_0 t'} = f(\tau) \quad (\tau = t' - t).$$

右辺を見つけるため，$t = 0, t' = \tau$ とおくと

$$f(\tau) = \frac{\mathrm{sn}\,\omega_0\tau}{1 + \mathrm{cn}\,\omega_0\tau} = \frac{1 - \mathrm{cn}\,\omega_0\tau}{\mathrm{sn}\,\omega_0\tau} = \sqrt{\frac{1 - \mathrm{cn}\,\omega_0\tau}{1 + \mathrm{cn}\,\omega_0\tau}}$$

$\omega_0 t' = u$, $\omega_0 t = v$, $w = u - v = \omega_0\tau$ とおくと，

$$\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,v - \mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{cn}\,u + \mathrm{cn}\,v} = \frac{\mathrm{cn}\,v - \mathrm{cn}\,u}{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,v + \mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,u} = \sqrt{\frac{1 - \mathrm{cn}\,w}{1 + \mathrm{cn}\,w}},$$

$$\frac{1 - \mathrm{cn}\,w}{1 + \mathrm{cn}\,w} = \frac{(\mathrm{cn}\,v - \mathrm{cn}\,u)(\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,v - \mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,u)}{(\mathrm{cn}\,u + \mathrm{cn}\,v)(\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,v + \mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,u)}.$$

これを $\mathrm{cn}\,w = \mathrm{cn}(u - v)$ について解いて，次を得る．

$$\mathrm{cn}(u - v) = \frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,v + \mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v + \mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}.$$

$v \to -v$ とすれば，題意の加法定理を得る． ■