楕円関数論 (15) Weierstrass の sigma 関数

緒方　秀教

電気通信大学　大学院情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻

2021 年 1 月

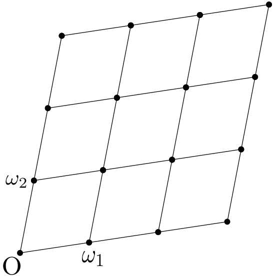
Weierstrass の sigma 関数.

$$\sigma(u) = u \prod_{u \in \Lambda - \{ 0 \}} \left(1 - \frac{u}{\omega}\right) \exp\left(\frac{u}{\omega} + \frac{u}{2\omega^2}\right),$$

$$\Lambda = \{ m\omega_1 + n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$

（周期格子）

格子状の零点を持つ整関数.
…テータ関数と似た性格を持つ.



周期格子 Λ.

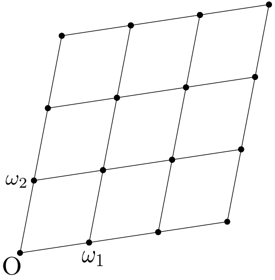
Weierstrass の sigma 関数.

$$\sigma(u) = u \prod_{\omega \in \Lambda - \{0\}} \left(1 - \frac{u}{\omega}\right) \exp\left(\frac{u}{\omega} + \frac{u}{2\omega^2}\right),$$

$$\Lambda = \{ m\omega_1 + n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$

(周期格子)

格子状の零点を持つ整関数.
…テータ関数と似た性格を持つ.



周期格子 Λ.

今回の内容

Weierstrass の sigma 関数 $\sigma(u)$ について, 同様な関数 $\sigma_1(u), \sigma_2(u), \sigma_3(u)$ を導入して, テータ関数との関連などを調べる.

（復習）Jacobi 楕円関数

sn, cn, dn 関数の定義　動画「楕円関数論 (1,2)」.

$$x = \mathrm{sn}(u;k) \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad u = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$\mathrm{cn}(u;k) = \sqrt{1-\mathrm{sn}^2(u;k)}, \quad \mathrm{dn}(u;k) = \sqrt{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(u;k)},$$

$$k \ (\ 0 < k < 1\ ) \quad \text{母数},$$

$$K = K(k) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad \text{第 1 種完全楕円積分.}$$

複素関数へ拡張　動画「楕円関数論 (3)」.

- 二重周期性

sn, cn, dn の周期（m, n：整数）

sn	cn	dn
$4mK,\ 2\mathrm{i}nK'$	$4mK,\ n(2K+2\mathrm{i}K')$	$2mK,\ 4\mathrm{i}nK'$

$$K' = K(k'), \quad k' = \sqrt{1-k^2} \ \text{補母数.}$$

（復習）Jacobi 楕円関数

- 格子状の零点，極をもつ．

sn, cn, dn の零点・極（すべて 1 位，m, n：整数）

	sn	cn	dn
零点	$2mK + 2\mathrm{i}nK'$	$(2m+1)K + 2\mathrm{i}nK'$	$(2m+1)K + \mathrm{i}(2n+1)K'$
極	$2mK + \mathrm{i}(2n+1)K'$		

sn, cn, dn 関数を，格子状の零点を持つ整関数の商で表したい．

$\Downarrow$

テータ関数

（動画「楕円関数論 (5)」）

（復習）テータ関数：格子状の零点を持つ整関数

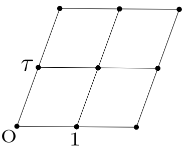
$$(\operatorname{Im}\tau > 0, \quad q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\tau})$$

$$\vartheta_1(v|\tau) = 2q^{1/4}\sin\pi v \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}v})(1-q^{2n}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}v}),$$

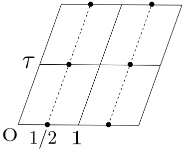
$$\vartheta_2(v|\tau) = 2q^{1/4}\cos\pi v \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}v})(1+q^{2n}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}v}),$$

$$\vartheta_3(v|\tau) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}v})(1+q^{2n-1}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}v}),$$

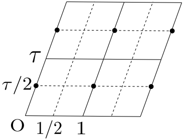
$$\vartheta_0(v|\tau) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n-1}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}v})(1-q^{2n-1}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}v}),$$



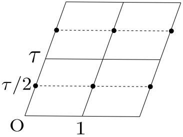
$\vartheta_1(v|\tau)$ の零点



$\vartheta_2(v|\tau)$ の零点



$\vartheta_3(v|\tau)$ の零点



$\vartheta_0(v|\tau)$ の零点

（復習）テータ関数：格子状の零点を持つ整関数

$$(\operatorname{Im}\tau > 0, \quad q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\tau})$$

$$\vartheta_1(v|\tau) = 2q^{1/4}\sin\pi v\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}v})(1-q^{2n}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}v}),$$

$$\vartheta_2(v|\tau) = 2q^{1/4}\cos\pi v\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}v})(1+q^{2n}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}v}),$$

$$\vartheta_3(v|\tau) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}v})(1+q^{2n-1}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}v}),$$

$$\vartheta_0(v|\tau) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n-1}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}v})(1-q^{2n-1}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}v}),$$

sn, cn, dn 関数はテータ関数の商で表される（動画「楕円関数論 (5,6)」）．

$$\mathrm{sn}(u;k) = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\vartheta_1(u/2K|\tau)}{\vartheta_0(u/2K|\tau)}, \quad \mathrm{cn}(u;k) = \sqrt{\frac{k'}{k}}\frac{\vartheta_2(u/2K|\tau)}{\vartheta_0(u/2K|\tau)},$$

$$\mathrm{dn}(u;k) = \sqrt{k'}\frac{\vartheta_3(u/2K|\tau)}{\vartheta_0(u/2K|\tau)} \qquad \left(\tau = \mathrm{i}\frac{K'}{K}\right).$$

（復習）Weierstrass の楕円関数

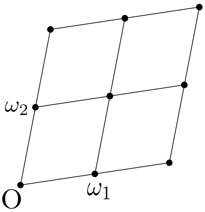
Weierstrass の楕円関数（動画「楕円関数論 (9,10)」）：
与えられた周期 ω_1, ω_2 ($\mathrm{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$) をもつ
楕円関数（二重周期関数）．

周期格子　$\Lambda = \{ m\omega_1 + n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$.

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{\omega \in \Lambda - \{0\}} \left(\frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right),$$

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} + \sum_{\omega \in \Lambda - \{0\}} \left(\frac{1}{u-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{u}{\omega^2} \right),$$

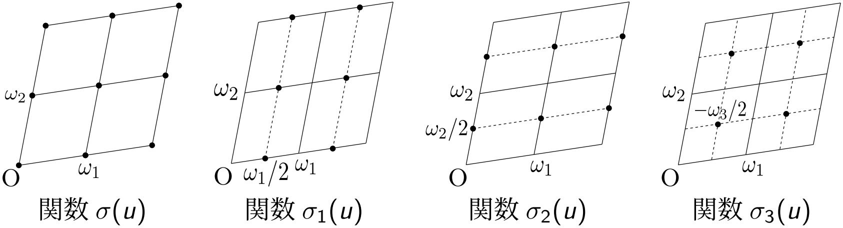
$$\sigma(u) = u \prod_{\omega \in \Lambda - \{0\}} \left(1 - \frac{u}{\omega}\right) \exp\left(\frac{u}{\omega} + \frac{u^2}{2\omega^2} \right).$$



- $\wp(u)$ は楕円関数（周期 $\omega \in \Lambda$），$\zeta(u), \sigma(u)$ は楕円関数でない.
- sigma 関数 $\sigma(u)$：テータ関数の役割を果たす
（格子点 $\omega \in \Lambda$ に零点を持つ整関数）.

- テータ関数：4 種類の零点に応じて 4 個つくられている．
- Weierstrass の sigma 関数も，4 種類の零点に応じて 4 個つくりたい．

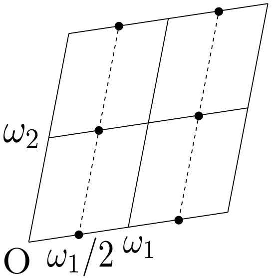
$$\sigma(u), \quad \sigma_1(u), \quad \sigma_2(u), \quad \sigma_3(u).$$



関数 $\sigma(u-\omega_1/2)$: $(m+1/2)\omega_1+n\omega_2$ ($m,n\in\mathbb{Z}$) に 1 位の零点を持つ.
$\sigma(u)$ の擬周期性より
（動画「「楕円関数論 (10)」）,

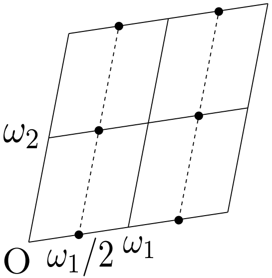
$$\sigma\left(u+\frac{\omega_1}{2}\right)=\sigma\left(u-\frac{\omega_1}{2}+\omega_1\right)$$
$$=-\exp\left(\eta_1\left(u-\frac{\omega_1}{2}+\frac{\omega_2}{2}\right)\right)$$
$$\times\,\sigma\left(u-\frac{\omega_1}{2}\right)$$
$$(\ \eta_1=2\zeta(\omega_1/2)\ )$$
$$=-\mathrm{e}^{\eta_1 u}\sigma\left(u-\frac{\omega_1}{2}\right),$$

$$-\mathrm{e}^{\eta_1 u/2}\sigma\left(u-\frac{\omega_1}{2}\right)=\mathrm{e}^{-\eta_1 u/2}\sigma\left(u+\frac{\omega_1}{2}\right).$$



関数 $\sigma(u-\omega_1/2)$：$(m+1/2)\omega_1+n\omega_2$ ($m,n\in\mathbb{Z}$) に 1 位の零点を持つ．
$\sigma(u)$ の擬周期性より
（動画「「楕円関数論 (10)」），

$$\sigma\left(u+\frac{\omega_1}{2}\right)=\sigma\left(u-\frac{\omega_1}{2}+\omega_1\right)$$
$$=-\exp\left(\eta_1\left(u-\frac{\omega_1}{2}+\frac{\omega_2}{2}\right)\right)$$
$$\times\sigma\left(u-\frac{\omega_1}{2}\right)$$
$$(\ \eta_1=2\zeta(\omega_1/2)\ )$$
$$=-\mathrm{e}^{\eta_1 u}\sigma\left(u-\frac{\omega_1}{2}\right),$$
$$-\mathrm{e}^{\eta_1 u/2}\sigma\left(u-\frac{\omega_1}{2}\right)=\mathrm{e}^{-\eta_1 u/2}\sigma\left(u+\frac{\omega_1}{2}\right).$$



関数 $\sigma_1(u)$

$$\sigma_1(u):=-\mathrm{e}^{\eta_1 u/2}\frac{\sigma(u-\omega_1/2)}{\sigma(\omega_1/2)}=\mathrm{e}^{-\eta_1 u/2}\frac{\sigma(u+\omega_1/2)}{\sigma(\omega_1/2)}.$$

関数 $\sigma_1(u), \sigma_2(u), \sigma_3(u)$

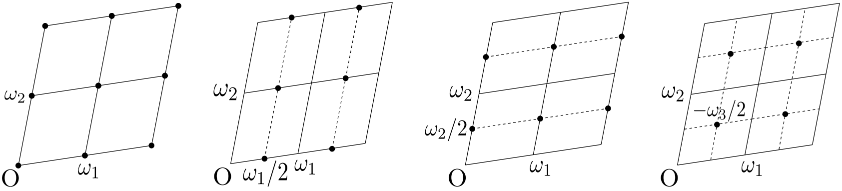
関数 $\sigma_1(u), \sigma_2(u), \sigma_3(u)$

$$
\sigma_1(u) := -\,\mathrm{e}^{\eta_1 u/2}\frac{\sigma(u-\omega_1/2)}{\sigma(\omega_1/2)} = \mathrm{e}^{-\eta_1 u/2}\frac{\sigma(u+\omega_1/2)}{\sigma(\omega_1/2)},
$$

$$
\sigma_2(u) := -\,\mathrm{e}^{\eta_2 u/2}\frac{\sigma(u-\omega_2/2)}{\sigma(\omega_2/2)} = \mathrm{e}^{-\eta_2 u/2}\frac{\sigma(u+\omega_2/2)}{\sigma(\omega_2/2)},
$$

$$
\sigma_3(u) := -\,\mathrm{e}^{\eta_3 u/2}\frac{\sigma(u-\omega_3/2)}{\sigma(\omega_3/2)} = \mathrm{e}^{-\eta_3 u/2}\frac{\sigma(u+\omega_3/2)}{\sigma(\omega_3/2)},
$$

$$
(\,\omega_3 = -\omega_1 - \omega_2, \quad \eta_i = 2\zeta(\omega_i/2) \quad (\,i = 1, 2, 3\,)\,).
$$

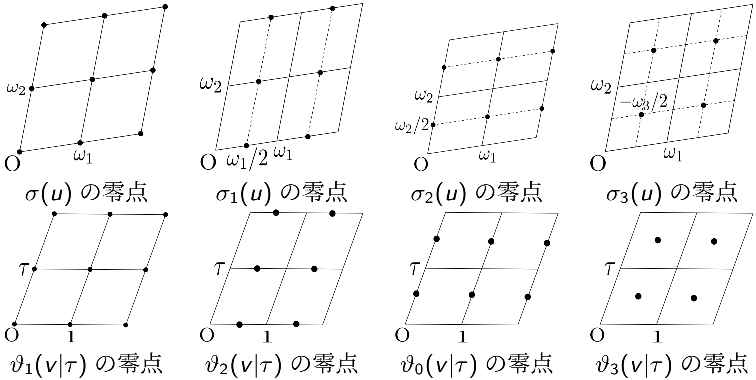


$\sigma(u)$ の零点 $\quad$ $\sigma_1(u)$ の零点 $\quad$ $\sigma_2(u)$ の零点 $\quad$ $\sigma_3(u)$ の零点

テータ関数との対応

零点の配置から，sigma 関数を次のようにテータ関数と対応づける．

$$\sigma(u) \leftrightarrow \vartheta_1(v|\tau), \quad \sigma_1(u) \leftrightarrow \vartheta_2(v|\tau),$$
$$\sigma_2(u) \leftrightarrow \vartheta_0(v|\tau), \quad \sigma_3(u) \leftrightarrow \vartheta_3(v|\tau).$$



$\sigma_1(u), \sigma_2(u), \sigma_3(u)$ は偶関数・擬周期性

$\sigma_1(u), \sigma_2(u), \sigma_3(u)$ は偶関数である．

$$\because \quad \sigma_1(-u) = -\mathrm{e}^{-\eta_1 u/2} \frac{\sigma(-u-\omega_1/2)}{\sigma(\omega_1/2)} = \mathrm{e}^{-\eta_1 u/2} \frac{\sigma(u+\omega_1/2)}{\sigma(\omega_1/2)} = \sigma_1(u), \quad \text{etc.}$$

$\sigma_1(u), \sigma_2(u), \sigma_3(u)$ は偶関数・擬周期性

$\sigma_1(u), \sigma_2(u), \sigma_3(u)$ は偶関数である.

奇関数	偶関数		
$\sigma(u)$ $\vartheta_1(v\|\tau)$	$\sigma_1(u)$ $\vartheta_2(v\|\tau)$	$\sigma_2(u)$ $\vartheta_0(v\|\tau)$	$\sigma_3(u)$ $\vartheta_3(v\|\tau)$

$\sigma_1(u), \sigma_2(u), \sigma_3(u)$ は偶関数・擬周期性

$\sigma_1(u), \sigma_2(u), \sigma_3(u)$ は偶関数である.

奇関数	偶関数		
$\sigma(u)$	$\sigma_1(u)$	$\sigma_2(u)$	$\sigma_3(u)$
$\vartheta_1(v\|\tau)$	$\vartheta_2(v\|\tau)$	$\vartheta_0(v\|\tau)$	$\vartheta_3(v\|\tau)$

$\sigma_1(u), \sigma_2(u), \sigma_3(u)$ の擬周期性

$$\sigma_i(u+\omega_j) = \begin{cases} -\exp\left(\eta_i\left(u+\dfrac{\omega_i}{2}\right)\right)\sigma_i(u) & (\ i=j\ ) \\ \exp\left(\eta_j\left(u+\dfrac{\omega_j}{2}\right)\right)\sigma_i(u) & (\ i\neq j\ ) \end{cases} \qquad (\ i,j=1,2,3\ ).$$

テータ関数との関連

復習（動画「楕円関数論（１０）」参照）

$$\sigma(u) = \frac{\omega_1}{\vartheta_1'} \exp\left(\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}\right) \vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_1}\middle|\tau\right) \quad \left(\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}\right).$$

これを用いて，$\sigma_1(u), \sigma_2(u), \sigma_3(u)$ をテータ関数で表す.

$$\sigma_1(u) = -\mathrm{e}^{\eta_1 u/2} \frac{\sigma(u-\omega_1/2)}{\sigma(\omega_1/2)},$$

$$\begin{aligned} \sigma\left(u - \frac{\omega_1}{2}\right) &= \frac{\omega_1}{\vartheta_1'} \exp\left(\frac{\eta_1}{2\omega_1}\left(u - \frac{\omega_1}{2}\right)^2\right) \vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_1} - \frac{1}{2}\middle|\tau\right) \\ &= -\frac{\omega_1}{\vartheta_1'} \exp\left(\frac{\eta_1\omega_1}{8}\right) \exp\left(\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1} - \frac{\eta_1}{2}u\right) \vartheta_2\left(\frac{u}{\omega_1}\middle|\tau\right), \\ \therefore \quad \sigma_1(u) &= \frac{1}{\vartheta_2} \exp\left(\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}\right) \vartheta_2\left(\frac{u}{\omega_1}\middle|\tau\right), \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

テータ関数との関連

$\sigma(u), \sigma_1(u), \sigma_2(u), \sigma_3(u)$ のテータ関数による表現

$$\sigma(u) = \frac{\omega_1}{\vartheta_1'} \exp\left(\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}\right) \vartheta_1\left(\left.\frac{u}{\omega_1}\right|\tau\right) \quad \longleftrightarrow \quad \vartheta_1(v|\tau),$$

$$\sigma_1(u) = \frac{1}{\vartheta_2} \exp\left(\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}\right) \vartheta_2\left(\left.\frac{u}{\omega_1}\right|\tau\right) \quad \longleftrightarrow \quad \vartheta_2(v|\tau),$$

$$\sigma_2(u) = \frac{1}{\vartheta_0} \exp\left(\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}\right) \vartheta_0\left(\left.\frac{u}{\omega_1}\right|\tau\right) \quad \longleftrightarrow \quad \vartheta_0(v|\tau),$$

$$\sigma_3(u) = \frac{1}{\vartheta_3} \exp\left(\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}\right) \vartheta_3\left(\left.\frac{u}{\omega_1}\right|\tau\right) \quad \longleftrightarrow \quad \vartheta_3(v|\tau).$$

前に提示した sigma 関数とテータ関数との対応づけに,
お墨付きがついた.

Jacobi 楕円関数の sigma 関数による表現

$\tau = \mathrm{i}K'/K$ として,

$$\mathrm{sn}(u;k) = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\vartheta_1(u/2K|\tau)}{\vartheta_0(u/2K|\tau)}, \quad \mathrm{cn}(u;k) = \sqrt{\frac{k'}{k}}\frac{\vartheta_2(u/2K|\tau)}{\vartheta_0(u/2K|\tau)},$$

$$\mathrm{dn}(u;k) = \sqrt{k'}\frac{\vartheta_3(u/2K|\tau)}{\vartheta_0(u/2K|\tau)},$$

$$K = \frac{\pi}{2}\vartheta_3^2, \quad \sqrt{k} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}, \quad \sqrt{k'} = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_3}.$$

これらを $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ で表すと次のようになる.

Jacobi 楕円関数の sigma 関数による表現

$$\mathrm{sn}(u;k) = \frac{2K}{\omega_1}\frac{\sigma(\omega_1 u/2K)}{\sigma_2(\omega_1 u/2K)}, \quad \mathrm{cn}(u;k) = \frac{\sigma_1(\omega_1 u/2K)}{\sigma_2(\omega_1 u/2K)},$$

$$\mathrm{dn}(u;k) = \frac{\sigma_3(\omega_1 u/2K)}{\sigma_2(\omega_1 u/2K)} \quad \left(\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \mathrm{i}\frac{K'}{K}\right).$$

$\wp(u)$ との関連

復習（動画「楕円関数論（１１）」参照）

$$\wp(u) - \wp(v) = -\frac{\sigma(u-v)\sigma(u+v)}{\sigma(u)^2\sigma(v)^2}.$$

$v = \omega_j/2$ ($j = 1, 2, 3$) を代入して,

$$\wp(u) - e_j = \frac{\sigma_j(u)^2}{\sigma(u)^2}, \qquad \sqrt{\wp(u) - e_j} = \frac{\sigma_j(u)}{\sigma(u)} \qquad \left(e_j = \wp\left(\frac{\omega_j}{2}\right);\ j = 1, 2, 3 \right).$$

$*$ 上の等号が成り立つように $\sqrt{\cdot}$ の分枝を選ぶ.

$u = \omega_i/2$ を代入して

$$e_i - e_j = \frac{\sigma_j(\omega_i/2)^2}{\sigma(\omega_j/2)^2} \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

判別式 Δ の表現

先程の $\sigma_i(u)$ のテータ関数による表現を用いると，

$$e_1 - e_2 = \left\{\frac{\sigma_2(\omega_1/2)}{\sigma(\omega_1/2)}\right\}^2 = \frac{1}{\omega_1^2}\left\{\frac{\vartheta_1'\vartheta_0(1/2)}{\vartheta_0\vartheta_1(1/2)}\right\}^2 = \frac{1}{\omega_1^2}\left(\frac{\vartheta_1'\vartheta_3}{\vartheta_0\vartheta_2}\right)^2$$
$$= \frac{1}{\omega_1^2}\left(\frac{\pi\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_0\cdot\vartheta_3}{\vartheta_2\vartheta_0}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^2\vartheta_3^2.$$

同様の計算により，

$$e_2 - e_3 = -\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^2\vartheta_2^4, \quad e_3 - e_1 = -\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^2\vartheta_0^4.$$

これらから，判別式（動画「楕円関数論 (9)」）

$$\Delta = 16(e_1-e_2)^2(e_2-e_3)^2(e_3-e_1)^2 = g_2^3 - 27g_3^2$$
$$\left(g_2 = 60\sum_{\omega\neq 0}\frac{1}{\omega^4}, \quad g_3 = 140\sum_{\omega\neq 0}\frac{1}{\omega^6}\right)$$

に対する別の表現が得られる：

$$\Delta = \frac{2^4\pi^{12}}{\omega_1^{12}}(\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_0)^8.$$

判別式 Δ の表現

テータ関数の無限積表示を用いると,

$$\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_0 = 2q^{1/4}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^3\left\{\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n})(1+q^{2n-1})(1-q^{2n-1})\right\}^2.$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n})(1+q^{2n-1})(1-q^{2n-1}) = \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n})(1-q^{4n-2})$$

$$= \frac{\prod(1-q^{4n})(1-q^{4n-2})}{\prod(1-q^{2n})},$$

$$\begin{aligned} 分子 &= (n\equiv 0 \mod 4 \text{ についての積}) \times (n \equiv 2 \mod 4 \text{ についての積}) \\ &= (\text{偶数 } n \text{ についての積}), \\ 分母 &= (\text{偶数 } n \text{ についての積}), \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n})(1+q^{2n-1})(1-q^{2n-1}) = 1,$$

$$\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_0 = 2q^{1/4}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^3.$$

判別式 Δ の表現

判別式 Δ の表現

$$\Delta := 16(e_1 - e_2)^2(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2 = g_2^3 - 27g_3^2$$
$$= \left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right)^{12} q^2 \prod_{n=1}^{\infty}(1 - q^{2n})^{24}.$$

判別式 Δ の表現

判別式 Δ の表現

$$\Delta := 16(e_1 - e_2)^2(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2 = g_2^3 - 27g_3^2$$
$$= \left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right)^{12} q^2 \prod_{n=1}^{\infty}(1 - q^{2n})^{24}.$$

（付録）

$$q^2 \prod_{n=1}^{\infty}(1 - q^{2n})^{24} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^{2n},$$

$\tau(n)$ Ramanujan 関数.

Ramanujan 予想

$$|\tau(p)| \leq 2p^{11/2} \quad (p：素数).$$

$\rightarrow$ 1974 年 Diligne が証明.

まとめ

- Weierstrass の sigma 関数：周期格子点上に零点をもつ整関数.
- 新たに関数 $\sigma_1(u), \sigma_2(u), \sigma_3(u)$ を定義して,
  テータ関数と関連付けた.
- Jacobi 楕円関数の sigma 関数による表示.
- 判別式 $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ の表現.

補遺：$\sigma_1(u), \sigma_2(u), \sigma_3(u)$ の擬周期性の証明

（証明）

$$
\begin{aligned}
\sigma_1(u+\omega_1) &= -\,\mathrm{e}^{\eta_1(u+\omega_1)/2}\frac{\sigma(u+\omega_1/2)}{\sigma(\omega_1)} \\
&= -\exp\left(\eta_1\left(u+\frac{\omega_1}{2}\right)\right)\mathrm{e}^{-\eta_1 u/2}\frac{\sigma(u+\omega_1/2)}{\sigma(\omega_1/2)} \\
&= -\exp\left(\eta_1\left(u+\frac{\omega_1}{2}\right)\right)\sigma_1(u).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_1(u+\omega_2) &= -\,\mathrm{e}^{\eta_1(u+\omega_2)/2}\frac{\sigma(u-\omega_1/2+\omega_2)}{\sigma(\omega_1/2)} \\
&= \exp\left(\frac{\eta_1}{2}(u+\omega_2)\right)\exp\left(\eta_2\left(u-\frac{\omega_1}{2}+\frac{\omega_2}{2}\right)\right)\frac{\sigma(u-\omega_1/2)}{\sigma(\omega_1/2)} \\
&= \exp\left(\left(\frac{\eta_1}{2}+\eta_2\right)u+\frac{1}{2}(\underbrace{\eta_1\omega_2-\eta_2\omega_1}_{2\pi\mathrm{i}}+\eta_2\omega_2)\right)\frac{\sigma(u-\omega_1/2)}{\sigma(\omega_1/2)}
\end{aligned}
$$

（Legendre の関係式を用いた）

$$
\begin{aligned}
&= -\exp\left(\eta_2\left(u+\frac{\omega_2}{2}\right)\right)\mathrm{e}^{\eta_1 u/2}\frac{\sigma(u-\omega_1/2)}{\sigma(\omega_1/2)} \\
&= \exp\left(\eta_2\left(u+\frac{\omega_2}{2}\right)\right)\sigma_1(u), \quad \text{etc.}
\end{aligned}
$$