楕円関数論 (16)
楕円関数論における不変性について

緒方　秀教

電気通信大学　大学院情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻

2021 年 1 月 29 日（金）

はじめに

不変性

自然界において本質的なものは，それを測る「ものさし」に依存しない．

- 「ものさし」を使うのは人間の都合．
- $3\text{m} = 300\text{cm} = 3000\text{mm}$.
  変換則 $1\text{m} = 100\text{cm} = 1000\text{mm}$ により同じ長さのものとみなす．
- （数学）テンソル解析．
- （物理）ゲージ理論．

はじめに

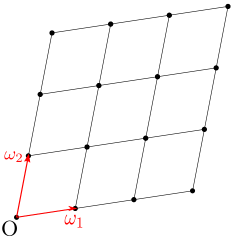
(Weierstrass) 楕円関数論においては,

- 周期格子

$$\Lambda = \{ m\omega_1 + n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z} \},$$

ω_1, ω_2 : Λ の基底 $\quad (\operatorname{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0)$.

基底が「ものさし」に該当する.



- 楕円関数

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{\omega \in \Lambda - \{0\}} \left(\frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right),$$

etc.

楕円関数は周期格子 Λ に対して与えられるが,
Λ の基底 $\{ \omega_1, \omega_2 \}$ の選び方には依存しない.

はじめに

楕円関数の数値計算にはテータ関数が用いられる．

$$\vartheta_1(v|\tau) = 2q^{1/4}\sin\pi v\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-2q^{2n}\cos 2\pi v + q^{4n}), \quad \text{etc.}$$

$$\tau = \omega_2/\omega_1, \quad \operatorname{Im}\tau > 0, \quad q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\tau}.$$

- テータ関数は Λ の基底 $\{\,\omega_1, \omega_2\,\}$ の取り方にあからさまに依存する．
- 楕円関数をテータ関数で計算する際，基底 $\{\,\omega_1, \omega_2\,\}$ の選び方で計算結果が変わらないか？

今回のテーマ：楕円関数の計算式の不変性

Weierstrass 楕円関数のテータ関数による計算式が，周期格子 Λ の基底 $\{\,\omega_1, \omega_2\,\}$ の選び方に依らないことを確かめる．

Weierstrass の sigma 関数

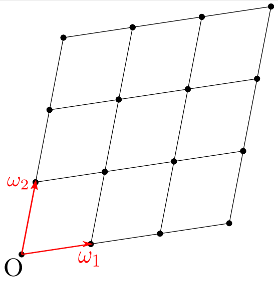
$$\sigma(u) = u \prod_{\omega \in \Lambda - \{0\}} \left(1 - \frac{u}{\omega}\right) \exp\left(\frac{u}{\omega} + \frac{u^2}{2\omega^2}\right),$$

$$\Lambda = \{ m\omega_1 + n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z} \} \quad (\text{周期格子}).$$

右辺は $\omega \neq 0$ なる周期格子点 $\omega \in \Lambda$ について積をとっている.

$$\Downarrow$$

周期格子 Λ の基底 ω_1, ω_2 のとり方には依存しない.

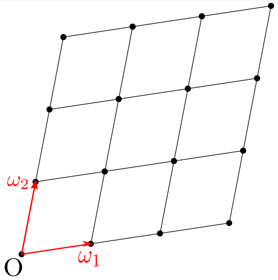


テータ関数 $\vartheta_1(v|\tau)$

$$\vartheta_1(v|\tau) = 2q^{1/4}\sin\pi v\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-2q^{2n}\cos 2\pi v + q^{4n}),$$

$$\tau = \omega_2/\omega_1 \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{Im}\,\tau > 0.$$

周期格子 Λ の基底 ω_1, ω_2 のとり方に依存する．
（基底 $\{\omega_1, \omega_2\}$ のとり方に対する関数だから，当たり前）



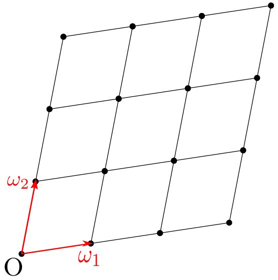
sigma 関数の計算式,「不変性」はあるのか？

sigma 関数の計算式（数値計算用の公式）

$$\sigma(u) = \frac{\omega_1}{\vartheta_1'} \exp\left(\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}\right) \vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_1}\middle|\tau\right), \quad \tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad \eta_1 = 2\zeta\left(\frac{\omega_1}{2}\right).$$

動画「楕円関数論 (10)」

- 左辺：基底 $\{\omega_1, \omega_2\}$ の取り方に依らない.
- 右辺：基底 $\{\omega_1, \omega_2\}$ の取り方に依るような表現.

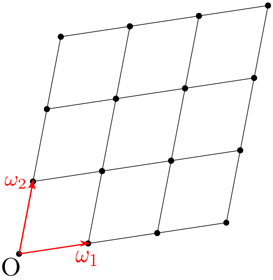


sigma 関数の計算式（数値計算用の公式）

$$\sigma(u) = \frac{\omega_1}{\vartheta_1'} \exp\left(\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}\right) \vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_1}\middle|\tau\right), \quad \tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad \eta_1 = 2\zeta\left(\frac{\omega_1}{2}\right).$$

動画「楕円関数論 (10)」

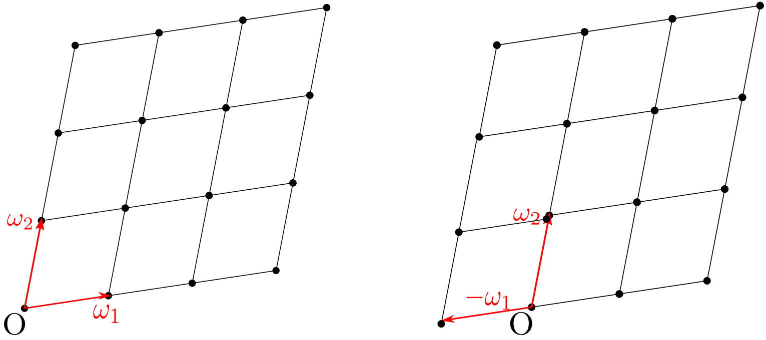
- 左辺：基底 $\{\omega_1, \omega_2\}$ の取り方に依らない.
- 右辺：基底 $\{\omega_1, \omega_2\}$ の取り方に依るような表現.



問題

周期格子 Λ の基底 $\{\omega_1, \omega_2\}$ のとり方を変えても，右辺が不変であることを示さなければならない.

まず，ω_1 と ω_2 の入れ替えに対する不変性を確かめる．



基底 $\{\,\omega_1, \omega_2\,\}$ $\longrightarrow$ 基底 $\{\,\omega_2, -\omega_1\,\}$

$(\ \mathrm{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0\ )$

テータ関数のパラメータ

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad \longrightarrow \quad \tau' = -\frac{1}{\tau} = \frac{-\omega_1}{\omega_2}.$$

ω_1, ω_2 の入れ替えに対する不変性

Jacobi の虚数変換（動画「楕円関数論 (7)」）

$$\vartheta_1(v|\tau) = -\mathrm{i}\sqrt{-\mathrm{i}\tau'}\exp(\mathrm{i}\pi\tau' v^2)\vartheta_1(\tau' v|\tau'), \quad \tau' = -\frac{1}{\tau}.$$

$$\sigma(u) = \frac{\omega_1}{\vartheta_1'(0|\tau)} \exp\left(\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}\right) \vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_1}\middle|\tau\right), \quad \tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

の右辺に Jacobi の虚数変換を適用する．

$$\vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_1}\middle|\tau\right) = \mathrm{i}\sqrt{-\mathrm{i}\tau'}\exp\left(\frac{\pi u^2}{\mathrm{i}\omega_1\omega_2}\right)\vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_2}\middle|\tau'\right),$$

$$\vartheta_1'(0|\tau) = -\mathrm{i}\tau'\sqrt{-\mathrm{i}\tau'}\vartheta_1'(0|\tau'),$$

ω_1, ω_2 の入れ替えに対する不変性

$$\sigma(u) = \frac{-\omega_1/\tau'}{\vartheta_1'(0|\tau')} \exp\left(\underbrace{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1} + \frac{\pi u^2}{\mathrm{i}\omega_1\omega_2}}_{(1)} \right) \vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_2} \middle| \tau' \right),$$

Legendre の関係式 $\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = 2\pi\mathrm{i}$ を用いて,

$$(1) = \frac{\mathrm{i}\eta_1\omega_2 + 2\pi}{2\mathrm{i}\omega_1\omega_2} = \frac{\eta_2}{2\omega_2},$$

$$\therefore \quad \sigma(u) = \frac{\omega_2}{\vartheta_1'(0|\tau')} \exp\left(\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2} \right) \vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_2} \middle| \tau' \right).$$

$$\left(\sigma(u) = \frac{\omega_1}{\vartheta_1'(0|\tau)} \exp\left(\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1} \right) \vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_1} \middle| \tau \right) \right)$$

sigma 関数 $\sigma(u)$ のテータ関数 $\vartheta_1(v|\tau)$ による計算式は，周期格子 Λ の基底の入れ替え $\{\,\omega_1, \omega_2\,\} \to \{\,\omega_2, -\omega_1\,\}$ に対して不変である．

ω_1, ω_2 の入れ替えに対する不変性

$$\sigma_1(u) = -\mathrm{e}^{\eta_1 u/2} \frac{\sigma(u - \omega_1/2)}{\sigma(\omega_1/2)} = \frac{1}{\vartheta_2} \exp\left(\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}\right) \vartheta_2 \left(\frac{u}{\omega_1} \middle| \tau\right).$$

Jacobi の虚数変換

$$\vartheta_2(v|\tau) = \sqrt{-\mathrm{i}\tau'} \exp(\mathrm{i}\pi\tau' v^2) \vartheta_0(\tau' v|\tau')$$

を用いて同様の変換をすると，

$$\sigma_1(u) = \frac{1}{\vartheta_0(0|\tau')} \exp\left(\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}\right) \vartheta_0 \left(\frac{u}{\omega_2} \middle| \tau'\right).$$

関数 $\sigma_1(u)$ は

- Λ の基底 $\{\,\omega_1, \omega_2\,\}$ をとると $\vartheta_2(v|\tau)$ で表される．
- Λ の基底 $\{\,\omega_2, -\omega_1\,\}$ をとると $\vartheta_0(v|\tau)$ で表される．

基底の入れ替え $\{\,\omega_1, \omega_2\,\} \to \{\,\omega_2, -\omega_1\,\}$ に対する不変性が保たれていない？

ω_1, ω_2 の入れ替えに対する不変性

$\sigma_1(u), \sigma_2(u)$ は Λ の基底の取り方に依存する関数である.

$$\sigma_1(u) = -\mathrm{e}^{\eta_1 u/2} \frac{\sigma(u - \omega_1/2)}{\sigma(\omega_1/2)}, \quad \sigma_2(u) = -\mathrm{e}^{\eta_2 u/2} \frac{\sigma(u - \omega_2/2)}{\sigma(\omega_2/2)}.$$

旧基底 $\{\, \omega_1, \omega_2 \,\}$ で $\sigma_1(u)$ だった関数は,
新基底 $\{\, \omega_2, -\omega_1 \,\}$ では $\sigma_2(u)$ になっているはず.

$$\sigma_1(u) = \frac{1}{\vartheta_0(0|\tau')} \exp\left(\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}\right) \vartheta_0\left(\frac{u}{\omega_2}\middle|\tau'\right) \quad \text{(新基底)}.$$

$$\sigma_2(u) = \frac{1}{\vartheta_0(0|\tau)} \exp\left(\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}\right) \vartheta_0\left(\frac{u}{\omega_1}\middle|\tau\right) \quad \text{(旧基底)}.$$

確かに関数 $\sigma_1(u)$ は新基底では $\sigma_2(u)$ になっている.

ω_1, ω_2 の入れ替えに対する不変性

$\sigma_2(u)$ も調べる．
$\sigma_2(u)$ は新基底 $\{\, \omega_2, -\omega_1 \,\}$ では $\sigma_1(u)$ になっているはず．
Jacobi の虚数変換

$$\vartheta_0(v|\tau) = \sqrt{-\mathrm{i}\tau'} \exp(\mathrm{i}\pi\tau' v^2)\vartheta_2(\tau' v|\tau')$$

により，

$$\sigma_2(u) = \frac{1}{\vartheta_0(0|\tau')} \exp\left(\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}\right) \vartheta_2\left(\frac{u}{\omega_2}\middle|\tau'\right) \quad \text{（新基底）},$$
$$\sigma_1(u) = \frac{1}{\vartheta_2(0|\tau)} \exp\left(\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}\right) \vartheta_2\left(\frac{u}{\omega_1}\middle|\tau\right) \quad \text{（旧基底）}.$$

関数 $\sigma_1(u), \sigma_2(u)$ のテータ関数による計算式は，周期格子 Λ の基底の入れ替え $\{\, \omega_1, \omega_2 \,\} \to \{\, \omega_2, -\omega_1 \,\}$ に対して不変である．

ω_1, ω_2 の入れ替えに対する不変性

関数 $\sigma_3(u)$ も調べておく.

$$\sigma_3(u) = \frac{1}{\vartheta_3} \exp\left(\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}\right) \vartheta_3\left(\frac{u}{\omega_1}\middle|\tau\right).$$

Jacobi の虚数変換

$$\vartheta_3(v|\tau) = \sqrt{-\mathrm{i}\tau'} \exp(\mathrm{i}\pi\tau' v^2)\vartheta_3(\tau' v|\tau')$$

により,

$$\sigma_3(u) = \frac{1}{\vartheta_3(0|\tau')} \exp\left(\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}\right) \vartheta_3\left(\frac{u}{\omega_2}\middle|\tau'\right).$$

関数 $\sigma_3(u)$ のテータ関数による計算式は，周期格子 Λ の
基底の入れ替え $\{\omega_1, \omega_2\} \to \{\omega_2, -\omega_1\}$ に対して不変である.

一般的な周期格子 Λ の基底の取替

もっと一般的な周期格子 Λ の基底の取替を考える.

$$\{\,\omega_1, \omega_2\,\} \to \{\,\omega_1', \omega_2'\,\}, \quad \mathrm{Im}(\omega_2'/\omega_1') > 0,$$

$$\begin{cases} \omega_2' = a\omega_2 + b\omega_1 \\ \omega_1' = c\omega_2 + d\omega_1 \end{cases} \qquad (\,a, b, c, d \in \mathbb{Z},\ ad - bc \neq 0\,).$$

定理

上の $\{\,\omega_1', \omega_2'\,\}$ が周期格子 Λ の基底を与える必要十分条件は

$$ad - bc = 1.$$

一般的な周期格子 Λ の基底の取替

（証明）必要条件であること：

$\{\,\omega_1', \omega_2'\,\}$ が Λ の基底であるから，$\omega_1, \omega_2 \in \Lambda$ は次のように表される．

$$\begin{pmatrix} \omega_2 \\ \omega_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_2' \\ \omega_1' \end{pmatrix}, \quad a', b', c', d' \in \mathbb{Z}.$$

よって，

$$\begin{pmatrix} \omega_2 \\ \omega_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_2 \\ \omega_1 \end{pmatrix}.$$

$\{\,\omega_1, \omega_2\,\}$ は Λ の基底であるから，

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

両辺の行列式をとって，$(a'd' - b'c')(ad - bc) = 1$.
$ad - bc, a'd' - b'c' \in \mathbb{Z}$ より $ad - bc = \pm 1$.

$$\mathrm{Im}\left(\frac{\omega_2'}{\omega_1'}\right) = \frac{(ad - bc)|\omega_1|^2}{|c\omega_2 + d\omega_1|^2}\,\mathrm{Im}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) > 0$$

より，$ad - bc = 1$ を得る．

（証明）十分条件であること：

仮定より，

$$\begin{pmatrix}\omega_2\\ \omega_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\omega_2'\\ \omega_1'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_2'\\ \omega_1'\end{pmatrix}$$

であり，$\{\,\omega_1,\omega_2\,\}$ は Λ の基底であることから，任意の Λ の元は $\{\,\omega_1',\omega_2'\,\}$ の整数係数一次結合で表される．

あとは，その一次結合が一意的であることを示せばよい．

$c_1\omega_1'+c_2\omega_2'=0,\ c_1,c_2\in\mathbb{Z}$ とする．

$$\begin{pmatrix}c_2 & c_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_2'\\ \omega_1'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_2 & c_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_2\\ \omega_1\end{pmatrix}=0.$$

$\{\,\omega_1,\omega_2\,\}$ は Λ の基底であるから，$\begin{pmatrix}c_2 & c_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}.$

両辺に右から $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$ を掛けて，

$(c_2\ c_1)=(0\ 0)$，すなわち，$c_1=c_2=0$ を得る． ■

一般的な周期格子 Λ の基底の取替：群 $SL(2,\mathbb{Z})$

群 $SL(2,\mathbb{Z})$

$$SL(2,\mathbb{Z}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b,c,d \in \mathbb{Z}, ad-bc=1 \right\}.$$

$SL(2,\mathbb{Z})$ は行列の乗法で群をなす.

$$\omega_1', \omega_2' \in \Lambda = \{\, m\omega_1 + n\omega_2 \mid m,n \in \mathbb{Z} \,\}$$

が Λ の基底をなす必要十分条件は,

$$\exists \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}) \quad \text{s.t.} \quad \begin{pmatrix} \omega_2' \\ \omega_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_2 \\ \omega_1 \end{pmatrix}.$$

一般的な周期格子 Λ の基底の取替に対する不変性

$$\sigma(u) = \frac{\omega_1}{\vartheta_1'} \exp\left(\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}\right) \vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_1}\middle|\tau\right), \quad \tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}. \tag{1}$$

任意の Λ の基底の取替 $\{\,\omega_1, \omega_2\,\} \to \{\,\omega_1', \omega_2'\,\}$,

$$\begin{pmatrix}\omega_2' \\ \omega_1'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_2 \\ \omega_1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$$

に対して計算式 (1) の不変性を示さなければならない（のか…）.

ところが, …

一般的な周期格子 Λ の基底の取替に対する不変性

$SL(2,\mathbb{Z})$ の生成元

$SL(2,\mathbb{Z})$ は次の 2 つの元で生成される．

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

i.e., $SL(2,\mathbb{Z})$ の任意の元は，$T^{\pm 1}$, $S^{\pm 1}$ のべき乗のいくつかの積

$$\cdots (T^{\pm 1})^a (S^{\pm 1})^b (T^{\pm 1})^c (S^{\pm 1})^d \cdots$$

の形で表される（証明は補遺に記す）．

$T^{\pm 1}$，$S^{\pm 1}$ に対応する基底の取替

- $\omega_2' = \omega_2 \pm \omega_1$, $\omega_1' = \omega_1$ ($\tau' = \tau \pm 1$)
- $\omega_2' = -\omega_1$, $\omega_1' = \omega_2$ ($\tau' = -1/\tau$)

に対して表式 (1) の不変性を示せばよい（後者は示した）．

一般的な周期格子 Λ の基底の取替に対する不変性

基底の取替

$$\omega_2' = \omega_2 \pm \omega_1, \quad \omega_1' = \omega_1 \quad (\,\tau' = \tau \pm 1\,)$$

のみ考えればよい.

$\tau \to \tau \pm 1$ に対する $\vartheta_1(v|\tau)$ の変換

$$\vartheta_1(v|\tau) = \mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}\pi/4} \vartheta_1(v|\tau \pm 1).$$

（証明）$\vartheta_1(v|\tau)$ の無限積表示

$$\vartheta_1(v|\tau) = 2q^{1/4} \sin \pi v \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 - 2q^{2n} \cos 2\pi v + q^{4n}) \quad (\,q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\tau}\,)$$

から直接証明される. ■

一般的な周期格子 Λ の基底の取替に対する不変性

- 旧基底 $\{\, \omega_1, \omega_2 \,\}$.

$$\sigma(u) = \frac{\omega_1}{\vartheta_1'(0|\tau)} \exp\left(\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}\right) \vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_1}\middle|\tau\right), \quad \tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

- 新基底 $\{\, \omega_1, \omega_2 \pm \omega_1 \,\}$.

$$\sigma(u) = \frac{\omega_1}{\vartheta_1'(0|\tau \pm 1)} \exp\left(\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}\right) \vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_1}\middle|\tau \pm 1\right), \quad \tau \pm 1 = \frac{\omega_2 \pm \omega_1}{\omega_1}.$$

$$\therefore \quad \text{基底の取替} \quad \omega_2' = \omega_2 \pm \omega_1, \quad \omega_1' = \omega_1 \quad (\, \tau' = \tau \pm 1 \,)$$

$$\left(SL(2,\mathbb{Z}) \text{ の生成元のひとつ} \quad T^{\pm 1} = \begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

に対しても，$\sigma(u)$ の $\vartheta_1(v|\tau)$ による表式 (1) は不変である．

$\sigma(u)$ の計算式の不変性

$\sigma(u)$ の計算式の不変性

sigma 関数 $\sigma(u)$ のテータ関数 $\vartheta_1(v|\tau)$ による計算式

$$\sigma(u) = \frac{\omega_1}{\vartheta_1'} \exp\left(\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}\right) \vartheta_1\left(\frac{u}{\omega_1}\middle|\tau\right), \quad \tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} \tag{2}$$

は，周期格子

$$\Lambda = \{\, m\omega_1 + n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z} \,\}$$

の基底の取替 $\{\,\omega_1, \omega_2\,\} \to \{\,\omega_1', \omega_2'\,\}$

$$\begin{pmatrix} \omega_2' \\ \omega_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_2 \\ \omega_1 \end{pmatrix} \quad \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \right)$$

に対して不変である，
i.e.,
Λ の基底 $\{\,\omega_1, \omega_2\,\}$ をどのようにとっても，式 (2) を使って $\sigma(u)$ を（そして，Weierstrass の楕円関数 $\zeta(u), \wp(u)$ を）計算することができる．

まとめ

- 不変性：本質的なものは「ものさし」の選び方に依らない.
- Weierstrass 楕円関数：周期格子 Λ の基底の選び方に依らない.
- テータ関数：周期格子 Λ の基底の選び方に依る.
- Weierstrass 楕円関数のテータ関数による計算式が Λ の基底の選び方に 依らないことを，テータ関数の変換則を用いて示した.
- 群 $SL(2,\mathbb{Z})$：周期格子 Λ の基底の入替えを与える.

補遺：$SL(2,\mathbb{Z})$ の生成元

定理

$SL(2,\mathbb{Z})$ は次の元で生成される．

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

すなわち，$SL(2,\mathbb{Z})$ のすべての元は $S^{\pm 1}, T^{\pm 1}$ のべき乗のいくつかの積で表される．

（証明）$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$ とする．証明を Step 1〜3 に分ける．

Step 1 $a = 0$ ならば，Step 3 へ直行する．

$$SM = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix}, \quad T^{\pm 1}M = \begin{pmatrix} a \pm c & b \pm d \\ c & d \end{pmatrix}.$$

$0 < |a| < |c|$ なら M の代わりに SM を考えることにより，$|a| \geq |c|$ としてよい．

補遺：$SL(2,\mathbb{Z})$ の生成元

Step 2 ある $p \in \mathbb{Z}$ に対し，

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} := T^p M = \begin{pmatrix} a+pc & b+pd \\ c & d \end{pmatrix}, \quad |a_1| < |c_1| = |c| \leq |a|.$$

$a_1 = 0$ なら Step 3 へ行く．$a_1 \neq 0$ なら，S を左から掛けて

$$S \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 & -d_1 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix}, \quad |a_1| < |-c_1|.$$

ある $q \in \mathbb{Z}$ に対し，

$$\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} := T^q \begin{pmatrix} -c_1 & -d_1 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1+qa_1 & -d_1+qb_1 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix}, \quad |a_2| < |c_2| = |a_1|.$$

$a_2 = 0$ なら Step 3 へ行く．$a_2 \neq 0$ なら，S を左から掛けて

$$S \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_2 & -d_2 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \quad |a_2| < |-c_2|,$$

$$\cdots$$

補遺：$SL(2,\mathbb{Z})$ の生成元

この操作を続けて行列 $\begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$ を生成していくと，$|a_k|$ は狭義単調減少する非負整数列となるので，ある k に対し $a_k = 0$ となる．

Step 3

$$\begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}.$$

$S, T^{\pm 1}$ を掛けても行列式の値は変わらないので，

$$\begin{vmatrix} 0 & b_k \\ c_k & d_k \end{vmatrix} = -b_k c_k = 1. \quad \therefore \quad (b_k, c_k) = (1, -1) \text{ or } (-1, 1).$$

$(b_k, c_k) = (-1, 1)$ ならば $S^2 = -I$ を掛けることにより，$(b_k, c_k) = (1, -1)$ としてよい．

$$\begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & d_k \end{pmatrix}, \quad S \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -d_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T^{-d_k}.$$

左辺 $=$ ($S^{\pm 1}, T^{\pm 1}$ のべき乗のいくつかの積)M なので，結局，$M \in SL(2,\mathbb{Z})$ が $S^{\pm 1}, T^{\pm 1}$ のべき乗のいくつかの積で表される． ■