オイラーの公式を理解する

緒方　秀教

電気通信大学　大学院情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻

2021 年 1 月 7 日（木）

動画の目的

オイラー (Euler) の公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta.$$

高校数学の知識でオイラーの公式を理解します.

使う道具

- 複素数の幾何学（複素平面）.
- $$\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{x}{N}\right)^N = \mathrm{e}^x.$$

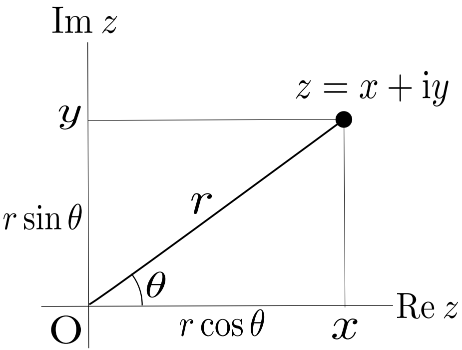
複素数と複素平面

- 複素数

$$z = x + \mathrm{i}y \quad （x, y：実数）,$$
$$\mathrm{i} = \sqrt{-1},$$
$$x = \mathrm{Re}\, z \quad z \text{ の実部},$$
$$y = \mathrm{Im}\, z \quad z \text{ の虚部}.$$

- 複素数の極座標表示

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta),$$
$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$z \text{ の絶対値},$$
$$\theta = \arg z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$z \text{ の偏角}.$$

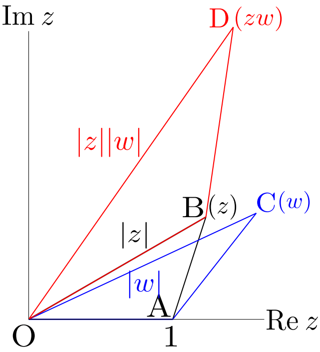


複素数の掛け算

$$z = |z|(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta),$$
$$w = |w|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi),$$
$$\begin{aligned} zw &= |z|(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \\ &\quad\times |w|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \\ &= |z||w|\{(\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi) \\ &\quad + \mathrm{i}(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi)\} \end{aligned}$$

（三角関数の加法定理を用いて），

$$zw = |z||w|\{\cos(\theta+\varphi) + \mathrm{i}\sin(\theta+\varphi)\}.$$



$\triangle$OAC と $\triangle$OBD は相似.

複素数の掛け算

- 絶対値については掛け算.
- 偏角については足し算.

オイラーの公式

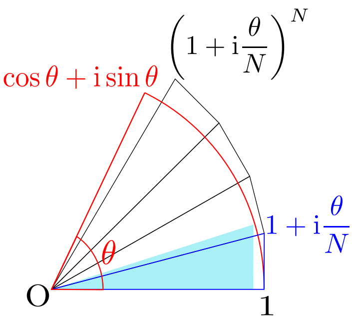
$$\left(1+\mathrm{i}\frac{\theta}{N}\right)^N.$$

$N\to\infty$ とすると

$$\lim_{N\to\infty}\left(1+\mathrm{i}\frac{\theta}{N}\right)^N=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

一方，N が大きければ

$$1+\mathrm{i}\frac{\theta}{N}\approx\cos\frac{\theta}{N}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{N}.$$



$$\lim_{N\to\infty}\left(1+\mathrm{i}\frac{\theta}{N}\right)^N=\lim_{N\to\infty}\left(\cos\frac{\theta}{N}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{N}\right)^N=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta.$$

オイラーの公式

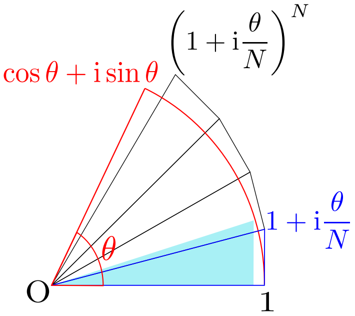
$$\left(1+\mathrm{i}\frac{\theta}{N}\right)^N.$$

$N\to\infty$ とすると

$$\lim_{N\to\infty}\left(1+\mathrm{i}\frac{\theta}{N}\right)^N=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

一方，N が大きければ

$$1+\mathrm{i}\frac{\theta}{N}\approx\cos\frac{\theta}{N}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{N}.$$



$$\lim_{N\to\infty}\left(1+\mathrm{i}\frac{\theta}{N}\right)^N=\lim_{N\to\infty}\left(\cos\frac{\theta}{N}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{N}\right)^N=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta.$$

$$\therefore\quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta.$$