

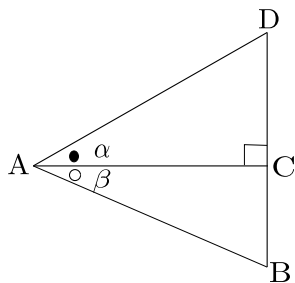
# 三角関数の加法定理，証明できますか？(2)

緒方 秀教

電気通信大学 大学院情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻

2021年1月10日（日）

# 三角関数の加法定理を証明してみよう



左の図を使って，三角関数の加法定理

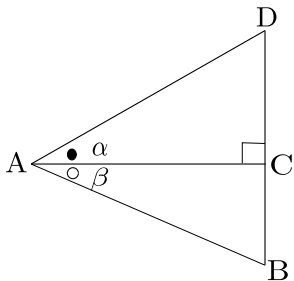
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

を証明してみよう.

# sin の加法定理の証明

三角形の面積に着目する.



$$AC = 1.$$

$$\begin{aligned}\triangle ABD &= \frac{1}{2} AB \cdot AD \sin(\alpha + \beta) \\ &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{2 \cos \alpha \cos \beta}.\end{aligned}$$

一方,

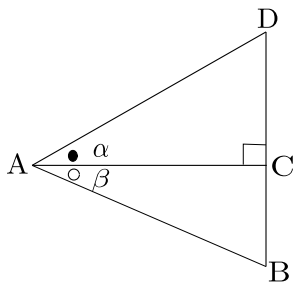
$$\begin{aligned}\triangle ABD &= \triangle ABC + \triangle ACD \\ &= \frac{1}{2} (\tan \alpha + \tan \beta).\end{aligned}$$

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} = \tan \alpha + \tan \beta,$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta (\tan \alpha + \tan \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

# cos の加法定理の証明

余弦定理を用いる（余弦定理の証明には加法定理を用いない）。



$$AC = 1.$$

$$\begin{aligned}BD^2 &= AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos(\alpha + \beta) \\ &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \beta} - \frac{2 \cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}.\end{aligned}$$

一方,

$$\begin{aligned}BD^2 &= (BC + CD)^2 \\ &= (\tan \alpha + \tan \beta)^2 \\ &= \tan^2 \alpha + \tan^2 \beta + 2 \tan \alpha \tan \beta \\ &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \beta} - 2 + 2 \tan \alpha \tan \beta.\end{aligned}$$

$$2 \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} = 2 - 2 \tan \alpha \tan \beta,$$

$$\therefore \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$