東大入試問題を解いてみた

緒方　秀教

電気通信大学　大学院情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻

2021 年 1 月 28 日（木）

東京大学 2019 年度・数学（理系）第 1 問

次の定積分を求めよ．

$$\int_0^1 \left(x^2 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) \left(1 + \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \right) \mathrm{d}x$$

予備校・参考書などによくあった解答.
被積分関数の積を展開して，各積分を置換積分を使って計算.

$$\int_0^1 \left(x^2 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\left(1 + \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\right) \mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x^3}{(1+x^2)^{3/2}} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\right) \mathrm{d}x.$$

なんか，面白くない…

というわけで，私なりに解答を考えてみました.
（以下の解答は，東京大学が公式に発表した解答ではありません）

私の解答

私はこう考えました.

$$\int_0^1 \left(x^2+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\left(1+\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1 x\left[x+(1+x^2)^{-1/2}\right]\left[1+x(1+x^2)^{-3/2}\right]\mathrm{d}x,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x+(1+x^2)^{-1/2}\right]=1-x(1+x^2)^{-3/2}.$$

ああ，次の積分だったら，部分積分で一発で計算できるのに…

$$\int_0^1 \left(x^2+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\left(1-\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\right)\mathrm{d}x$$

いや待てよ…と少し考えて，次の解答を思いつきました.

私の解答

$$I = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) \left(1 + \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} \right) \mathrm{d}x \quad （題意の積分）,$$

$$J = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) \left(1 - \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} \right) \mathrm{d}x.$$

- J は部分積分で計算できる．

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 x[x + (1+x^2)^{-1/2}] \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x + (1+x^2)^{-1/2}] \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left\{ [x + (1+x^2)^{-1/2}]^2 \right\} \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

- $I + J$ は簡単に計算できる．

$$I + J = 2 \int_0^1 \left(x^2 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) \mathrm{d}x.$$

私の解答

$$I = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\left(1 + \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}\right)\mathrm{d}x \quad \text{（題意の積分）},$$
$$J = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\left(1 - \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}\right)\mathrm{d}x.$$

1. J を計算する.
2. $I + J$ を計算する.
3. $I = (I + J) - J$ が求める積分.

私の解答

J を部分積分で計算する．

$$
\begin{aligned}
J &= \frac{1}{2}\int_0^1 x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{[x+(1+x^2)^{-1/2}]^2\right\}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left[x[x+(1+x^2)^{-1/2}]^2\right]_0^1 - \int_0^1 [x+(1+x^2)^{-1/2}]^2\mathrm{d}x\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{2}\int_0^1\left(x^2+\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{19}{12}-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}.
\end{aligned}
$$

私の解答

$I+J$ を計算する．

$$I+J=2\int_0^1\left(x^2+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\mathrm{d}x=2\sqrt{2}-\frac{4}{3}.$$

$$\therefore\quad I=(I+J)-J=\frac{\pi}{8}+\frac{5}{\sqrt{2}}-\frac{35}{12}.$$

私の解答

$I+J$ を計算する．

$$I+J=2\int_0^1\left(x^2+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\mathrm{d}x=2\sqrt{2}-\frac{4}{3}.$$

$$\therefore\quad I=(I+J)-J=\frac{\pi}{8}+\frac{5}{\sqrt{2}}-\frac{35}{12}.$$

$*$ この動画を受験勉強に利用するならば（という方がおられるかわかりませんが…）自己責任でお願いします．受験勉強の教育的配慮はせずに，私が好き勝手に答を作ったのですから．