楕円関数論 (17)
テータ関数の加法公式 (1)

緒方　秀教

電気通信大学　大学院情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻

2021 年 2 月 7 日（日）

はじめに：楕円関数の加法定理

テータ関数

$$\vartheta_1(v|\tau) = -\mathrm{i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{(n+1/2)^2}\exp((2n+1)\pi\mathrm{i}v)$$
$$= 2q^{1/4}\sin\pi v\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}v})(1-q^{2n}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}v}), \quad \text{etc.}$$

$$\tau\ :\ \text{複素パラメータ}, \quad \mathrm{Im}\,\tau > 0, \quad q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\tau}.$$

- 楕円関数は加法定理を満たす.
- 楕円関数はテータ関数で表される.

テータ関数

$$\vartheta_1(v|\tau) = -\mathrm{i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{(n+1/2)^2}\exp((2n+1)\pi\mathrm{i}v)$$
$$= 2q^{1/4}\sin\pi v\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}v})(1-q^{2n}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}v}), \quad \text{etc.}$$
$$\tau\ :\ \text{複素パラメータ}, \quad \mathrm{Im}\,\tau > 0, \quad q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\tau}.$$

- 楕円関数は加法定理を満たす.
- 楕円関数はテータ関数で表される.

テータ関数も加法公式を満たす.

はじめに：楕円関数の加法定理

テータ関数

$$\vartheta_1(v|\tau) = -\mathrm{i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{(n+1/2)^2}\exp((2n+1)\pi\mathrm{i}v)$$

$$= 2q^{1/4}\sin\pi v\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}v})(1-q^{2n}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}v}),\quad \text{etc.}$$

$$\tau\ :\ \text{複素パラメータ},\quad \operatorname{Im}\tau>0,\quad q=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\tau}.$$

- 楕円関数は加法定理を満たす．
- 楕円関数はテータ関数で表される．

テータ関数も加法公式を満たす．

今回やること

- Riemann のテータ関係式を証明する（加法公式の出発点）．
- 加法公式をひとつ，テータ関係式より求める．

まず，テータ関数の復習（無限和表示）

∗ 動画「楕円関数論（６）：テータ関数（無限和表示）」参照）

$$\tau\ :\ \text{複素パラメータ},\quad \operatorname{Im}\tau > 0,\quad q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\tau},$$

$$\vartheta_1(v|\tau) = -\mathrm{i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{(n+1/2)^2}\exp((2n+1)\pi\mathrm{i}v),$$

$$\vartheta_2(v|\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+1/2)^2}\exp((2n+1)\pi\mathrm{i}v),$$

$$\vartheta_3(v|\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}\exp(2n\pi\mathrm{i}v),$$

$$\vartheta_0(v|\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\exp(2n\pi\mathrm{i}v).$$

Riemann のテータ関係式

テータ関数の加法定理の出発点.

Riemann のテータ関係式

$$
\begin{aligned}
&\vartheta_1(v_1|\tau)\vartheta_1(v_2|\tau)\vartheta_1(v_3|\tau)\vartheta_1(v_4|\tau)+\vartheta_2(v_1|\tau)\vartheta_2(v_2|\tau)\vartheta_2(v_3|\tau)\vartheta_2(v_4|\tau)\\
&\quad+\vartheta_3(v_1|\tau)\vartheta_3(v_2|\tau)\vartheta_3(v_3|\tau)\vartheta_3(v_4|\tau)+\vartheta_0(v_1|\tau)\vartheta_0(v_2|\tau)\vartheta_0(v_3|\tau)\vartheta_0(v_4|\tau)\\
&=2\vartheta_3(v_1'|\tau)\vartheta_3(v_2'|\tau)\vartheta_3(v_3'|\tau)\vartheta_0(v_4'|\tau),
\end{aligned}
$$

$$
v_1'=\frac{1}{2}(v_1+v_2+v_3+v_4),\quad v_2'=\frac{1}{2}(v_1+v_2-v_3-v_4),
$$

$$
v_3'=\frac{1}{2}(v_1-v_2+v_3-v_4),\quad v_4'=\frac{1}{2}(v_1-v_2-v_3+v_4).
$$

Riemann のテータ関係式

テータ関数の加法定理の出発点．

Riemann のテータ関係式

$$
\begin{aligned}
&\vartheta_1(v_1|\tau)\vartheta_1(v_2|\tau)\vartheta_1(v_3|\tau)\vartheta_1(v_4|\tau)+\vartheta_2(v_1|\tau)\vartheta_2(v_2|\tau)\vartheta_2(v_3|\tau)\vartheta_2(v_4|\tau)\\
&\quad+\vartheta_3(v_1|\tau)\vartheta_3(v_2|\tau)\vartheta_3(v_3|\tau)\vartheta_3(v_4|\tau)+\vartheta_0(v_1|\tau)\vartheta_0(v_2|\tau)\vartheta_0(v_3|\tau)\vartheta_0(v_4|\tau)\\
&=2\vartheta_3(v_1'|\tau)\vartheta_3(v_2'|\tau)\vartheta_3(v_3'|\tau)\vartheta_0(v_4'|\tau),\\
&\qquad v_1'=\frac{1}{2}(v_1+v_2+v_3+v_4),\quad v_2'=\frac{1}{2}(v_1+v_2-v_3-v_4),\\
&\qquad v_3'=\frac{1}{2}(v_1-v_2+v_3-v_4),\quad v_4'=\frac{1}{2}(v_1-v_2-v_3+v_4).
\end{aligned}
$$

見た目がゴチャゴチャしているので，表記を簡略化する．

$$
\vartheta_j(v)=\vartheta_j(v|\tau)\quad (\,j=0\sim 3\,),
$$

$$
\prod_{i=1}^{4}\vartheta_j(v_i)=\vartheta_j(v_1|\tau)\vartheta_j(v_2|\tau)\vartheta_j(v_3|\tau)\vartheta_j(v_4|\tau)\quad (\,j=0\sim 3\,).
$$

Riemann のテータ関係式

Riemann のテータ関係式

$$\prod_{i=1}^{4} \vartheta_1(v_i) + \prod_{i=1}^{4} \vartheta_2(v_i) + \prod_{i=1}^{4} \vartheta_3(v_i) + \prod_{i=1}^{4} \vartheta_0(v_i) = 2\prod_{i=1}^{4} \vartheta_3(v_i'),$$

$$v_1' = \frac{1}{2}(v_1 + v_2 + v_3 + v_4),$$

$$v_2' = \frac{1}{2}(v_1 + v_2 - v_3 - v_4),$$

$$v_3' = \frac{1}{2}(v_1 - v_2 + v_3 - v_4),$$

$$v_4' = \frac{1}{2}(v_1 - v_2 - v_3 + v_4).$$

これから，この関係式を証明する．

テータ関数の無限和表示より，

$$
\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{4}\vartheta_1(v_i)+\prod_{i=1}^{4}\vartheta_2(v_i)+\prod_{i=1}^{4}\vartheta_3(v_i)+\prod_{i=1}^{4}\vartheta_0(v_i)\\
=&\sum_{n_1,n_2,n_3,n_4\in\mathbb{Z}}(-1)^{n_1+n_2+n_3+n_4}q^{(n_1+1/2)^2+(n_2+1/2)^2+(n_3+1/2)^2+(n_4+1/2)^2}\\
&\qquad\times\exp\left(\mathrm{i}\pi((2n_1+1)v_1+(2n_2+1)v_2+(2n_3+1)v_3+(2n_4+1)v_4)\right)\\
&+\sum_{n_1,n_2,n_3,n_4\in\mathbb{Z}}q^{(n_1+1/2)^2+(n_2+1/2)^2+(n_3+1/2)^2+(n_4+1/2)^2}\\
&\qquad\times\exp\left(\mathrm{i}\pi((2n_1+1)v_1+(2n_2+1)v_2+(2n_3+1)v_3+(2n_4+1)v_4)\right)\\
&+\sum_{n_1,n_2,n_3,n_4\in\mathbb{Z}}q^{n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_4^2}\exp(2\pi\mathrm{i}(n_1v_1+n_2v_2+n_3v_3+n_4v_4))\\
&+\sum_{n_1,n_2,n_3,n_4\in\mathbb{Z}}(-1)^{n_1+n_2+n_3+n_4}q^{n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_4^2}\exp(2\pi\mathrm{i}(n_1v_1+n_2v_2+n_3v_3+n_4v_4)).
\end{aligned}
$$

かなり煩雑な式だが，よく見ると⋯

Riemann のテータ関係式（証明 2/6）

$\sum\bigcirc + \sum(\pm 1)\bigcirc$ の形が現れている．

$$
\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{4}\vartheta_1(v_i)+\prod_{i=1}^{4}\vartheta_2(v_i)+\prod_{i=1}^{4}\vartheta_3(v_i)+\prod_{i=1}^{4}\vartheta_0(v_i)\\
&=\sum_{n_1,n_2,n_3,n_4\in\mathbb{Z}}(-1)^{n_1+n_2+n_3+n_4}q^{(n_1+1/2)^2+(n_2+1/2)^2+(n_3+1/2)^2+(n_4+1/2)^2}\\
&\qquad\times\exp\left(i\pi((2n_1+1)v_1+(2n_2+1)v_2+(2n_3+1)v_3+(2n_4+1)v_4)\right)\\
&\quad+\sum_{n_1,n_2,n_3,n_4\in\mathbb{Z}}q^{(n_1+1/2)^2+(n_2+1/2)^2+(n_3+1/2)^2+(n_4+1/2)^2}\\
&\qquad\times\exp\left(i\pi((2n_1+1)v_1+(2n_2+1)v_2+(2n_3+1)v_3+(2n_4+1)v_4)\right)\\
&\quad+\sum_{n_1,n_2,n_3,n_4\in\mathbb{Z}}q^{n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_4^2}\exp(2\pi i(n_1v_1+n_2v_2+n_3v_3+n_4v_4))\\
&\quad+\sum_{n_1,n_2,n_3,n_4\in\mathbb{Z}}(-1)^{n_1+n_2+n_3+n_4}q^{n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_4^2}\exp(2\pi i(n_1v_1+n_2v_2+n_3v_3+n_4v_4)).
\end{aligned}
$$

$n_1+n_2+n_3+n_4=$ 奇数 の項は第 1 和と第 2 和，第 3 和と第 4 和で相殺して消える．

Riemann のテータ関係式（証明 3/6）

（中間地点）

$$\prod_{i=1}^{4}\vartheta_1(v_i)+\prod_{i=1}^{4}\vartheta_2(v_i)+\prod_{i=1}^{4}\vartheta_3(v_i)+\prod_{i=1}^{4}\vartheta_0(v_i)$$
$$=2\sum_{m_1,m_2,m_3,m_4}{}' q^{m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2}\exp\left(2\pi i(m_1v_1+m_2v_2+m_3v_3+m_4v_4)\right),$$

ここで，$\displaystyle\sum_{m_1,m_2,m_3,m_4}{}'$ は次を満たす m_1, m_2, m_3, m_4 についての和を表す：

(1)　$m_1, m_2, m_3, m_4 \in \mathbb{Z} \quad \& \quad m_1+m_2+m_3+m_4 \in 2\mathbb{Z}$,

または

(2)　$m_1, m_2, m_3, m_4 \in \mathbb{Z}+1/2 \quad \& \quad m_1+m_2+m_3+m_4 \in 2\mathbb{Z}$.

今度は，この $m_1, \dots, m_4$ についての和を書き直す．

次でひとつ，トリッキーな操作を行う．

Riemann のテータ関係式では次の変数が使われていた：

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \\ v_4' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}, \quad A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

そこで，次の $n_1, \dots, n_4$ を導入してみる：

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{pmatrix}.$$

すると，A は直交行列 ($A^T A = I$) であるから，

$$\sum_{i=1}^{4} m_i^2 = \sum_{i=1}^{4} n_i^2, \quad \sum_{i=1}^{4} m_i v_i = \sum_{i=1}^{4} n_i v_i'.$$

ここで，次の (M), (N) は同値である．

$$(\mathrm{M})\quad \begin{cases} (1)\quad m_1, m_2, m_3, m_4 \in \mathbb{Z} \quad \& \quad m_1 + m_2 + m_3 + m_4 \in 2\mathbb{Z}, \\ \text{または} \\ (2)\quad m_1, m_2, m_3, m_4 \in \mathbb{Z} + 1/2 \quad \& \quad m_1 + m_2 + m_3 + m_4 \in 2\mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$(\mathrm{N})\quad n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbb{Z}.$$

（証明）次の式からわかる．

$$\begin{cases} n_1 = \dfrac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3 + m_4) \\ n_2 = \dfrac{1}{2}(m_1 + m_2 - m_3 - m_4) \\ n_3 = \dfrac{1}{2}(m_1 - m_2 + m_3 - m_4) \\ n_4 = \dfrac{1}{2}(m_1 - m_2 - m_3 + m_4), \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} m_1 = \dfrac{1}{2}(n_1 + n_2 + n_3 + n_4) \\ m_2 = \dfrac{1}{2}(n_1 + n_2 - n_3 - n_4) \\ m_3 = \dfrac{1}{2}(n_1 - n_2 + n_3 - n_4) \\ m_4 = \dfrac{1}{2}(n_1 - n_2 - n_3 + n_4). \end{cases}$$

$$n_2 = n_1 - (m_3 + m_4), \quad m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 2n_1, \quad \text{etc.}$$

以上より，

$$
\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{4}\vartheta_1(v_i)+\prod_{i=1}^{4}\vartheta_2(v_i)+\prod_{i=1}^{4}\vartheta_3(v_i)+\prod_{i=1}^{4}\vartheta_0(v_i)\\
&=2\sum_{n_1,n_2,n_3,n_4\in\mathbb{Z}} q^{n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_4^2}\exp\left(2\pi\mathrm{i}(n_1v_1'+n_2v_2'+n_3v_3'+n_4v_4')\right)\\
&=2\left\{\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}q^{n_1^2}\mathrm{e}^{2n_1\pi\mathrm{i}v_1'}\right\}\left\{\sum_{n_2=-\infty}^{\infty}q^{n_2^2}\mathrm{e}^{2n_2\pi\mathrm{i}v_2'}\right\}\\
&\quad\times\left\{\sum_{n_3=-\infty}^{\infty}q^{n_3^2}\mathrm{e}^{2n_3\pi\mathrm{i}v_3'}\right\}\left\{\sum_{n_4=-\infty}^{\infty}q^{n_4^2}\mathrm{e}^{2n_4\pi\mathrm{i}v_4'}\right\}\\
&=2\vartheta_3(v_1')\vartheta_3(v_2')\vartheta_3(v_3')\vartheta_3(v_4').
\end{aligned}
$$

（Riemann のテータ関係式の証明終わり）

ご苦労さまでした．

Riemann のテータ関係式群

Riemann のテータ関係式は他にもいろいろ存在する．

Riemann のテータ関係式

$$\text{(RI)}\quad \prod_{i=1}^{4}\vartheta_3(v_i)+\prod_{i=1}^{4}\vartheta_0(v_i)+\prod_{i=1}^{4}\vartheta_1(v_i)+\prod_{i=1}^{4}\vartheta_2(v_i)=2\prod_{i=1}^{4}\vartheta_3(v_i'),$$

$$\text{(RII)}\quad \prod_{i=1}^{4}\vartheta_3(v_i)+\prod_{i=1}^{4}\vartheta_0(v_i)-\prod_{i=1}^{4}\vartheta_1(v_i)-\prod_{i=1}^{4}\vartheta_2(v_i)=2\prod_{i=1}^{4}\vartheta_0(v_i'),$$

$$\text{(RIII)}\quad \prod_{i=1}^{4}\vartheta_3(v_i)-\prod_{i=1}^{4}\vartheta_0(v_i)+\prod_{i=1}^{4}\vartheta_1(v_i)-\prod_{i=1}^{4}\vartheta_2(v_i)=2\prod_{i=1}^{4}\vartheta_1(v_i'),$$

$$\text{(RIV)}\quad \prod_{i=1}^{4}\vartheta_3(v_i)-\prod_{i=1}^{4}\vartheta_0(v_i)-\prod_{i=1}^{4}\vartheta_1(v_i)+\prod_{i=1}^{4}\vartheta_2(v_i)=2\prod_{i=1}^{4}\vartheta_2(v_i'),$$

$$v_1'=\frac{1}{2}(v_1+v_2+v_3+v_4),\quad v_2'=\frac{1}{2}(v_1+v_2-v_3-v_4),$$

$$v_3'=\frac{1}{2}(v_1-v_2+v_3-v_4),\quad v_4'=\frac{1}{2}(v_1-v_2-v_3+v_4).$$

$*$ $\vartheta_3\leftrightarrow v_1$, $\vartheta_0\leftrightarrow v_2$, $\vartheta_1\leftrightarrow v_3$, $\vartheta_2\leftrightarrow v_4$.

Riemann のテータ関係式群

(RII∼IV) : (RI) で変数をシフトすることにより得られる.

(RI)⇒(RII)　(RI) で $v_1 \to v_1 + 1$ とする.

$$\text{(RI)} \quad \prod_{i=1}^{4} \vartheta_3(v_i) + \prod_{i=1}^{4} \vartheta_0(v_i) + \prod_{i=1}^{4} \vartheta_1(v_i) + \prod_{i=1}^{4} \vartheta_2(v_i) = 2\prod_{i=1}^{4} \vartheta_3(v_i').$$

において，テータ関数の無限和表示より

$$\vartheta_{1,2}(v_1+1) = -\vartheta_{1,2}(v_1), \quad \vartheta_{3,4}(v_1+1) = \vartheta_{3,4}(v_1),$$

$v_i' \to v_i' + 1/2$ ($i = 1 \sim 4$) となって，$\vartheta_3(v_i' + 1/2) = \vartheta_0(v_i')$ であるから，

$$\text{(RII)} \quad \prod_{i=1}^{4} \vartheta_3(v_i) + \prod_{i=1}^{4} \vartheta_0(v_i) - \prod_{i=1}^{4} \vartheta_1(v_i) - \prod_{i=1}^{4} \vartheta_2(v_i) = 2\prod_{i=1}^{4} \vartheta_0(v_i').$$

- (RIII) : (RI) で $v_1 \to v_1 + 1 + \tau$ とおいて得られる.
- (RIV) : (RI) で $v_1 \to v_1 + \tau$ とおいて得られる.

テータ関数の加法公式

Riemann のテータ関係式よりテータ関数の加法公式をひとつ求める.

(RI), (RIII) で $v_1 = v_2 = v, v_3 = v_4 = w$ とおく.

$v_1' = v + w,\ v_2' = v - w,\ v_3' = v_4' = 0$ と $\vartheta_1(0) = 0$ より,

$$\begin{aligned}\vartheta_3^2(v)\vartheta_3^2(w) + \vartheta_0^2(v)\vartheta_0^2(w) + \vartheta_1^2(v)\vartheta_1^2(w) + \vartheta_2^2(v)\vartheta_2^2(w) \\ = 2\vartheta_3^2\vartheta_3(v+w)\vartheta_3(v-w),\end{aligned} \tag{1}$$

$$\vartheta_3^2(v)\vartheta_3^2(w) - \vartheta_0^2(v)\vartheta_0^2(w) + \vartheta_1^2(v)\vartheta_1^2(w) - \vartheta_2^2(v)\vartheta_2^2(w) = 0. \tag{2}$$

テータ関数の加法公式

Riemann のテータ関係式よりテータ関数の加法公式をひとつ求める．
(RI), (RIII) で $v_1 = v_2 = v, v_3 = v_4 = w$ とおく．
$v_1' = v + w,\ v_2' = v - w,\ v_3' = v_4' = 0$ と $\vartheta_1(0) = 0$ より，

$$\begin{aligned}\vartheta_3^2(v)\vartheta_3^2(w) + \vartheta_0^2(v)\vartheta_0^2(w) + \vartheta_1^2(v)\vartheta_1^2(w) + \vartheta_2^2(v)\vartheta_2^2(w) \\ = 2\vartheta_3^2\vartheta_3(v+w)\vartheta_3(v-w),\end{aligned} \tag{1}$$

$$\vartheta_3^2(v)\vartheta_3^2(w) - \vartheta_0^2(v)\vartheta_0^2(w) + \vartheta_1^2(v)\vartheta_1^2(w) - \vartheta_2^2(v)\vartheta_2^2(w) = 0. \tag{2}$$

(1), (2) より

テータ関数の加法公式（のひとつ）

$$\begin{aligned}\vartheta_3^2\vartheta_3(v+w)\vartheta_3(v-w) &= \vartheta_1^2(v)\vartheta_1^2(w) + \vartheta_3^2(v)\vartheta_3^2(w) \\ &= \vartheta_2^2(v)\vartheta_2^2(w) + \vartheta_0^2(v)\vartheta_0^2(w).\end{aligned}$$

まとめ

- 楕円関数の加法定理と同様，テータ関数は加法公式を満たす.
- Riemann のテータ関係式：加法公式の基本.
- Riemann のテータ関係式よりテータ関数の加法公式を導出した.

次回の予定.

- Jacobi 楕円関数をテータ関数を用いて再定義する.
- テータ関数の加法公式は Jacobi 楕円関数の加法定理と整合性をもつ.