# 楕円関数論 (18)
# テータ関数の加法公式 (2)

緒方　秀教

電気通信大学　大学院情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻

2021 年 2 月 12 日（金）

# (復習) テータ関数

テータ関数.

$$\operatorname{Im}\tau > 0, \quad q = \exp(\mathrm{i}\pi\tau).$$

$$\vartheta_1(v) = \vartheta_1(v|\tau) = -\mathrm{i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{(n+1/2)^2}\exp((2n+1)\pi\mathrm{i}v),$$

$$\vartheta_2(v) = \vartheta_2(v|\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+1/2)^2}\exp((2n+1)\pi\mathrm{i}v),$$

$$\vartheta_3(v) = \vartheta_3(v|\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}\exp(2n\pi\mathrm{i}v),$$

$$\vartheta_0(v) = \vartheta_0(v|\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\exp(2n\pi\mathrm{i}v).$$

- 楕円関数はテータ関数を用いて表される.
- 楕円関数は加法定理を満たす.
- テータ関数は加法公式を満たす.

## Riemann のテータ関係式：テータ関数の加法公式の出発点

$$\text{(RI)}\quad \prod_{i=1}^{4}\vartheta_3(v_i)+\prod_{i=1}^{4}\vartheta_0(v_i)+\prod_{i=1}^{4}\vartheta_1(v_i)+\prod_{i=1}^{4}\vartheta_2(v_i)=2\prod_{i=1}^{4}\vartheta_3(v_i'),$$

$$\text{(RII)}\quad \prod_{i=1}^{4}\vartheta_3(v_i)+\prod_{i=1}^{4}\vartheta_0(v_i)-\prod_{i=1}^{4}\vartheta_1(v_i)-\prod_{i=1}^{4}\vartheta_2(v_i)=2\prod_{i=1}^{4}\vartheta_0(v_i'),$$

$$\text{(RIII)}\quad \prod_{i=1}^{4}\vartheta_3(v_i)-\prod_{i=1}^{4}\vartheta_0(v_i)+\prod_{i=1}^{4}\vartheta_1(v_i)-\prod_{i=1}^{4}\vartheta_2(v_i)=2\prod_{i=1}^{4}\vartheta_1(v_i'),$$

$$\text{(RIV)}\quad \prod_{i=1}^{4}\vartheta_3(v_i)-\prod_{i=1}^{4}\vartheta_0(v_i)-\prod_{i=1}^{4}\vartheta_1(v_i)+\prod_{i=1}^{4}\vartheta_2(v_i)=2\prod_{i=1}^{4}\vartheta_2(v_i'),$$

$$v_1'=\frac{1}{2}(v_1+v_2+v_3+v_4),\quad v_2'=\frac{1}{2}(v_1+v_2-v_3-v_4),$$

$$v_3'=\frac{1}{2}(v_1-v_2+v_3-v_4),\quad v_4'=\frac{1}{2}(v_1-v_2-v_3+v_4).$$

行列・ベクトルを用いて書き直すと，暗記しやすくなる．

**Riemann のテータ関係式**

$$\begin{pmatrix} \prod_{i=1}^4 \vartheta_3(v_i') \\ \prod_{i=1}^4 \vartheta_0(v_i') \\ \prod_{i=1}^4 \vartheta_1(v_i') \\ \prod_{i=1}^4 \vartheta_2(v_i') \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \prod_{i=1}^4 \vartheta_3(v_i) \\ \prod_{i=1}^4 \vartheta_0(v_i) \\ \prod_{i=1}^4 \vartheta_1(v_i) \\ \prod_{i=1}^4 \vartheta_2(v_i) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \\ v_4' \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}.$$

# （復習）テータ関数の加法公式

Riemann のテータ関係式と次のテータ関数の変数シフト公式から，
テータ関数の種々の加法公式が得られる．

**テータ関数の変数シフト公式**

$$\begin{cases} \vartheta_1(v+1/2) = \vartheta_2(v) \\ \vartheta_2(v+1/2) = -\vartheta_1(v) \\ \vartheta_3(v+1/2) = \vartheta_0(v) \\ \vartheta_0(v+1/2) = \vartheta_3(v). \end{cases} \qquad \begin{cases} \vartheta_1(v+\tau/2) = \mathrm{i}q^{-1/4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi v}\vartheta_0(v) \\ \vartheta_2(v+\tau/2) = q^{-1/4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi v}\vartheta_3(v) \\ \vartheta_3(v+\tau/2) = q^{-1/4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi v}\vartheta_2(v) \\ \vartheta_0(v+\tau/2) = \mathrm{i}q^{-1/4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi v}\vartheta_1(v). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vartheta_1(v+1/2+\tau/2) = q^{-1/4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi v}\vartheta_3(v) \\ \vartheta_2(v+1/2+\tau/2) = -\mathrm{i}q^{-1/4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi v}\vartheta_0(v) \\ \vartheta_3(v+1/2+\tau/2) = \mathrm{i}q^{-1/4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi v}\vartheta_1(v) \\ \vartheta_0(v+1/2+\tau/2) = q^{-1/4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi v}\vartheta_2(v). \end{cases}$$

# 今回やること

## 今回やること

Jacobi 楕円関数をテータ関数を用いて再定義する.

そして，テータ関数で定義された Jacobi 楕円関数が
従来の Jacobi 楕円関数の公式を満たすことを，
テータ関数の加法公式を用いて示す.

- 加法定理.
- $\mathrm{sn}^2\,u + \mathrm{cn}^2\,u = 1,\ k^2\,\mathrm{sn}^2\,u + \mathrm{dn}^2\,u = 1.$
- 微分方程式
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\,\mathrm{sn}\,u = \mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u.$$
- （複素数）母数 $k$ を先に与えたとき，
$$k = \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2} = \frac{\vartheta_2^2(0|\tau)}{\vartheta_3^2(0|\tau)} = \left(\begin{array}{c}\text{テータ関数で}\\ \text{定義された母数}\end{array}\right).$$

# Jacobi 楕円関数の再定義

**テータ関数を用いた Jacobi 楕円関数の定義**

$$\mathrm{sn}\, u = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_1(u/2K)}{\vartheta_0(u/2K)}, \quad \mathrm{cn}\, u = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_2(u/2K)}{\vartheta_0(u/2K)},$$

$$\mathrm{dn}\, u = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_3}\frac{\vartheta_3(u/2K)}{\vartheta_0(u/2K)},$$

$$k = \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}, \quad k' = \frac{\vartheta_0^2}{\vartheta_3^2}, \quad K = \frac{\pi}{2}\vartheta_3^2, \quad K' = -\mathrm{i}\tau K.$$

複素数の母数 $k$ に対して Jacobi 楕円関数を定義できる．

# sn の加法定理

ここでは，sn の加法定理を証明する．

$$\mathrm{sn}(u_1 + u_2) = \frac{\mathrm{sn}\, u_1 \,\mathrm{cn}\, u_2 \,\mathrm{dn}\, u_2 + \mathrm{sn}\, u_2 \,\mathrm{cn}\, u_1 \,\mathrm{dn}\, u_1}{1 - k^2 \,\mathrm{sn}^2\, u_1 \,\mathrm{sn}^2\, u_2}.$$

$*$ cn, dn の加法定理は補遺で証明する．

# sn の加法定理

ここでは，sn の加法定理を証明する．

$$\mathrm{sn}(u_1+u_2)=\frac{\mathrm{sn}\,u_1\,\mathrm{cn}\,u_2\,\mathrm{dn}\,u_2+\mathrm{sn}\,u_2\,\mathrm{cn}\,u_1\,\mathrm{dn}\,u_1}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,u_1\,\mathrm{sn}^2\,u_2}.$$

$*$ cn, dn の加法定理は補遺で証明する．

テータ関数の等式に書き直すと（$v=u_1/2K, w=u_2/2K$ とおいて），

**sn の加法定理**

$$\frac{\vartheta_2\vartheta_3}{\vartheta_0^2}\frac{\vartheta_1(v+w)}{\vartheta_0(v+w)}=\frac{\vartheta_1(v)\vartheta_0(v)\vartheta_2(w)\vartheta_3(w)+\vartheta_2(v)\vartheta_3(v)\vartheta_1(w)\vartheta_0(w)}{\vartheta_0^2(v)\vartheta_0^2(w)-\vartheta_1^2(v)\vartheta_1^2(w)}.$$

これを証明すればよい．

# sn の加法定理

Riemann のテータ関係式

$$(\mathrm{RII}) \quad \prod_{i=1}^{4}\vartheta_3(v_i)+\prod_{i=1}^{4}\vartheta_0(v_i)-\prod_{i=1}^{4}\vartheta_1(v_i)-\prod_{i=1}^{4}\vartheta_2(v_i)=2\prod_{i=1}^{4}\vartheta_0(v_i'),$$

$$(\mathrm{RIII}) \quad \prod_{i=1}^{4}\vartheta_3(v_i)-\prod_{i=1}^{4}\vartheta_0(v_i)+\prod_{i=1}^{4}\vartheta_1(v_i)-\prod_{i=1}^{4}\vartheta_2(v_i)=2\prod_{i=1}^{4}\vartheta_1(v_i')$$

$v_1=v_2=v$, $v_3=v_4=w$ とおくと $v_1'=v+w$, $v_2'=v-w$, $v_3'=v_4'=0$ となり，$\vartheta_1(0)=0$ にも注意して，

$$\vartheta_3^2(v)\vartheta_3^2(w)+\vartheta_0^2(v)\vartheta_0^2(w)-\vartheta_1^2(v)\vartheta_1^2(w)-\vartheta_2^2(v)\vartheta_2^2(w)=2\vartheta_0^2\vartheta_0(v+w)\vartheta_0(v-w),$$
$$\vartheta_3^2(v)\vartheta_3^2(w)-\vartheta_0^2(v)\vartheta_0^2(w)+\vartheta_1^2(v)\vartheta_1^2(w)-\vartheta_2^2(v)\vartheta_2^2(w)=0.$$

**テータ関数の加法公式 (1)**

$$\begin{aligned}\therefore \quad \vartheta_0^2\vartheta_0(v+w)\vartheta_0(v-w)&=\vartheta_0^2(v)\vartheta_0^2(w)-\vartheta_1^2(v)\vartheta_1^2(w)\\&=\vartheta_3^2(v)\vartheta_3^2(w)-\vartheta_2^2(v)\vartheta_2^2(w).\end{aligned}$$

# sn の加法定理

証明すべき式

$$\frac{\vartheta_2\vartheta_3}{\vartheta_0^2}\frac{\vartheta_1(v+w)}{\vartheta_0(v+w)} = \frac{\vartheta_1(v)\vartheta_0(v)\vartheta_2(w)\vartheta_3(w)+\vartheta_2(v)\vartheta_3(v)\vartheta_1(w)\vartheta_0(w)}{\vartheta_0^2(v)\vartheta_0^2(w)-\vartheta_1^2(v)\vartheta_1^2(w)},$$

そして今，次の式が得られた．

$$\vartheta_0^2\vartheta_0(v+w)\vartheta_0(v-w) = \vartheta_0^2(v)\vartheta_0^2(w)-\vartheta_1^2(v)\vartheta_1^2(w). \tag{1}$$

証明すべき式

$$\frac{\vartheta_2\vartheta_3}{\vartheta_0^2}\frac{\vartheta_1(v+w)}{\vartheta_0(v+w)} = \frac{\vartheta_1(v)\vartheta_0(v)\vartheta_2(w)\vartheta_3(w)+\vartheta_2(v)\vartheta_3(v)\vartheta_1(w)\vartheta_0(w)}{\vartheta_0^2(v)\vartheta_0^2(w)-\vartheta_1^2(v)\vartheta_1^2(w)},$$

そして今，次の式が得られた．

$$\vartheta_0^2\vartheta_0(v+w)\vartheta_0(v-w) = \vartheta_0^2(v)\vartheta_0^2(w)-\vartheta_1^2(v)\vartheta_1^2(w). \tag{1}$$

したがって，次の式を証明すればよい．

**テータ関数の加法公式 (2)**

$$\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_1(v+w)\vartheta_0(v-w)$$
$$=\vartheta_1(v)\vartheta_0(v)\vartheta_2(w)\vartheta_3(w)+\vartheta_2(v)\vartheta_3(v)\vartheta_1(w)\vartheta_0(w).$$

# sn の加法定理

Riemann のテータ関係式

$$\text{(RI)}\quad \prod_{i=1}^{4}\vartheta_1(v_i)+\prod_{i=1}^{4}\vartheta_2(v_i)+\prod_{i=1}^{4}\vartheta_3(v_i)+\prod_{i=1}^{4}\vartheta_0(v_i)=2\prod_{i=1}^{4}\vartheta_3(v_i').$$

$$v_1\to v_1,\quad v_2\to v_2+\frac{\tau}{2},\quad v_3\to v_3+\frac{1}{2},\quad v_4\to v_4+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}$$

とすれば

$$v_1'\to v_1'+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2},\quad v_2'\to v_2'-\frac{1}{2},\quad v_3'\to v_3'-\frac{\tau}{2},\quad v_4'\to v_4'$$

となり，テータ関数の変数シフト公式を使って次の式を得る．

$$\begin{aligned}&\vartheta_1(v_1)\vartheta_0(v_2)\vartheta_2(v_3)\vartheta_3(v_4)+\vartheta_0(v_1)\vartheta_1(v_2)\vartheta_3(v_3)\vartheta_2(v_4)\\&+\vartheta_2(v_1)\vartheta_3(v_2)\vartheta_1(v_3)\vartheta_0(v_4)+\vartheta_3(v_1)\vartheta_2(v_2)\vartheta_0(v_3)\vartheta_1(v_4)\\&=2\vartheta_1(v_1')\vartheta_0(v_2')\vartheta_2(v_3')\vartheta_3(v_4').\end{aligned}$$

# sn の加法定理

$$
\begin{aligned}
&\vartheta_1(v_1)\vartheta_0(v_2)\vartheta_2(v_3)\vartheta_3(v_4)+\vartheta_0(v_1)\vartheta_1(v_2)\vartheta_3(v_3)\vartheta_2(v_4)\\
&+\vartheta_2(v_1)\vartheta_3(v_2)\vartheta_1(v_3)\vartheta_0(v_4)+\vartheta_3(v_1)\vartheta_2(v_2)\vartheta_0(v_3)\vartheta_1(v_4)\\
&=2\vartheta_1(v_1')\vartheta_0(v_2')\vartheta_2(v_3')\vartheta_3(v_4').
\end{aligned}
$$

$$
v_1=v_2=v, \quad v_3=v_4=w
$$

とおくと

$$
v_1'=v+w, \quad v_2'=v-w, \quad v_3'=v_4'=0
$$

となり，

$$
\begin{aligned}
&\vartheta_1(v)\vartheta_0(v)\vartheta_2(w)\vartheta_3(w)+\vartheta_2(v)\vartheta_3(v)\vartheta_1(w)\vartheta_0(w)\\
&=\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_1(v+w)\vartheta_0(v-w).
\end{aligned}
$$

これは求める等式である．ゆえに，sn の加法定理が証明された． ■

# $\mathrm{sn}^2 u + \mathrm{cn}^2 u = 1$

$\mathrm{sn}^2 u + \mathrm{cn}^2 u = 1$ にテータ関数による $\mathrm{sn}\, u, \mathrm{cn}\, u$ の定義を代入すると,

$$\frac{\vartheta_3^2}{\vartheta_2^2}\frac{\vartheta_1^2(v)}{\vartheta_0^2(v)} + \frac{\vartheta_0^2}{\vartheta_2^2}\frac{\vartheta_2^2(v)}{\vartheta_0^2(v)} = 1.$$

**$\mathrm{sn}^2 u + \mathrm{cn}^2 u = 1$**

$$\vartheta_3^2\vartheta_1^2(v) + \vartheta_0^2\vartheta_2^2(v) = \vartheta_2^2\vartheta_0^2(v).$$

証明すべきはこの等式である.

# $\mathrm{sn}^2 u + \mathrm{cn}^2 u = 1$

Riemann のテータ関係式

$$\text{(RIV)} \quad \prod_{i=1}^{4} \vartheta_3(v_i) - \prod_{i=1}^{4} \vartheta_0(v_i) - \prod_{i=1}^{4} \vartheta_1(v_i) + \prod_{i=1}^{4} \vartheta_2(v_i) = 2\prod_{i=1}^{4} \vartheta_2(v_i')$$

$$v_1 \to v_1, \quad v_2 \to v_2, \quad v_3 \to v_3 + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}, \quad v_4 \to v_4 + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}$$

とすると次の式を得る.

$$\begin{aligned} &\vartheta_3(v_1)\vartheta_3(v_2)\vartheta_1(v_3)\vartheta_1(v_4) + \vartheta_1(v_1)\vartheta_1(v_2)\vartheta_3(v_3)\vartheta_3(v_4) \\ &+\vartheta_0(v_1)\vartheta_0(v_2)\vartheta_2(v_3)\vartheta_2(v_4) + \vartheta_2(v_1)\vartheta_2(v_2)\vartheta_0(v_3)\vartheta_0(v_4) \\ &= 2\vartheta_0(v_1')\vartheta_0(v_2')\vartheta_2(v_3')\vartheta_2(v_4'). \end{aligned}$$

$v_1 = v_2 = 0$, $v_3 = v_4 = v$ とおくと $v_1' = v$, $v_2' = -v$, $v_3' = v_4' = 0$ となり,
次の式を得る.

$$\vartheta_3^2\vartheta_1^2(v) + \vartheta_0^2\vartheta_2^2(v) = \vartheta_2^2\vartheta_0^2(v).$$

これは求める等式である. ■

$*$ $k^2 \mathrm{sn}^2 u + \mathrm{dn}^2 u = 1$ は補遺で証明する.

# 微分方程式 $(\mathrm{sn}\, u)' = \mathrm{cn}\, u\, \mathrm{dn}\, u$

$(\mathrm{sn}\, u)' = \mathrm{cn}\, u\, \mathrm{dn}\, u$ にテータ関数による sn, cn, dn の定義を代入すると,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left\{\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_1(u/2K)}{\vartheta_0(u/2K)}\right\} = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_2(u/2K)}{\vartheta_0(u/2K)}\cdot\frac{\vartheta_0}{\vartheta_3}\frac{\vartheta_3(u/2K)}{\vartheta_0(u/2K)}.$$

$K = (\pi/2)\vartheta_3^2$, $\vartheta_1' = \pi\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_0$ を用いて整理すると,

**微分方程式 $(\mathrm{sn}\, u)' = \mathrm{cn}\, u\, \mathrm{dn}\, u$**

$$\vartheta_2\vartheta_3\left\{\vartheta_0(v)\vartheta_1'(v) - \vartheta_1(v)\vartheta_0'(v)\right\} = \vartheta_0\vartheta_1'\vartheta_2(v)\vartheta_3(v).$$

証明すべきはこの等式である.

# 微分方程式 $(\mathrm{sn}\,u)' = \mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u$

$(\mathrm{sn}\,u)' = \mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u$ にテータ関数による sn, cn, dn の定義を代入すると,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left\{\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_1(u/2K)}{\vartheta_0(u/2K)}\right\} = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_2(u/2K)}{\vartheta_0(u/2K)}\cdot\frac{\vartheta_0}{\vartheta_3}\frac{\vartheta_3(u/2K)}{\vartheta_0(u/2K)}.$$

$K = (\pi/2)\vartheta_3^2$, $\vartheta_1' = \pi\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_0$ を用いて整理すると,

**微分方程式 $(\mathrm{sn}\,u)' = \mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u$**

$$\vartheta_2\vartheta_3\left\{\vartheta_0(v)\vartheta_1'(v) - \vartheta_1(v)\vartheta_0'(v)\right\} = \vartheta_0\vartheta_1'\vartheta_2(v)\vartheta_3(v).$$

証明すべきはこの等式である.

これは, sn の加法定理の証明で示した次の加法公式から得られる.

**テータ関数の加法公式 (2)**

$$\begin{aligned}&\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_1(v+w)\vartheta_0(v-w)\\ &= \vartheta_2(v)\vartheta_3(v)\vartheta_1(w)\vartheta_0(w) + \vartheta_1(v)\vartheta_0(v)\vartheta_2(w)\vartheta_3(w).\end{aligned}$$

$\because$ 両辺を $w$ について微分して $w = 0$ とおけばよい

($\vartheta_2'(0) = \vartheta_3'(0) = 0$ に注意).

# 母数 $k$ についての問題

テータ関数により Jacobi 楕円関数を定義する際，
母数 $k$ に関する次の問題がある．

**従来の Jacobi 楕円関数論との整合性**

（一般には複素数の）母数 $k$ を先に与えたとき，

1. 完全楕円積分で与えた $\tau = \mathrm{i}K(k')/K(k)$ は
$$\operatorname{Im}\tau > 0$$
を満たすだろうか？

2. 前項で与えた $\tau$ は
$$k = \left( \begin{array}{c} \text{テータ関数で} \\ \text{定義した母数} \end{array} \right) = \frac{\vartheta_2^2(0|\tau)}{\vartheta_0^2(0|\tau)}$$
を満たすだろうか？

# 母数 $k$ についての問題 (1)

**母数 $k$ についての問題 (1)：答**

$$k^2 \not\leq 0 \ \& \ k^2 \not\geq 1$$

ならば，$\tau = \mathrm{i}K(k')/K(k)$ は $\mathrm{Im}\,\tau > 0$ を満たす.

**母数 $k$ についての問題 (1)：答**

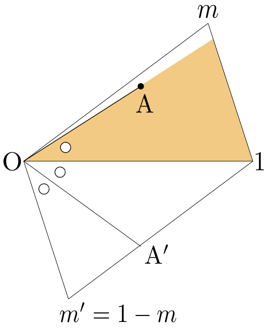
$$k^2 \not\leq 0 \ \& \ k^2 \not\geq 1$$

ならば，$\tau = \mathrm{i}K(k')/K(k)$ は $\operatorname{Im}\tau > 0$ を満たす．

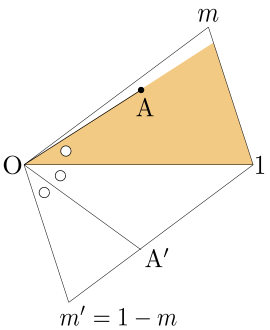
（証明）$m = k^2$, $m' = k'^2 = 1 - m$ とおく．

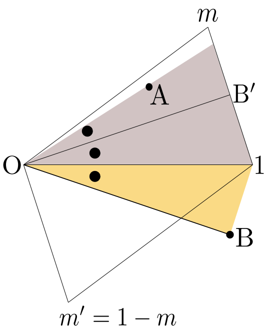
$$\mathrm{K}(m) \equiv K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1 - m\sin^2\theta}}.$$

$\theta$ が $0 \leq \theta \leq \pi/2$ を動くとき，$1 - m\sin^2\theta$ は線分 $m'1$ 上を動く．
よって，$(1 - m\sin^2\theta)^{1/2}$ は錘 $\angle \mathrm{A'O1}$ 内を動き（$\mathrm{OA'}$ は角 $\angle m'\mathrm{O1}$ の二等分線），$(1 - m\sin^2\theta)^{-1/2}$ は錘 $\angle \mathrm{AO1}$ 内を動く（点 A は実軸に関して点 A′ と対称）．



# 母数 $k$ についての問題 (1)




一般に，錘 $\angle\mathrm{AO1}$ 内の点 $u_1, \dots, u_n$ と $a_1, \dots, a_n \geq 0$ に対し点 $\sum_i a_i u_i$ は錘 $\angle\mathrm{AO1}$ 内にある．楕円積分 $\mathsf{K}(m)$ はそのような和（Riemann 和）の極限だから，錘 $\angle\mathrm{AO1}$ 内にある．

同様にして，楕円積分 $\mathsf{K}(m')$ は錘 $\angle\mathrm{BO1}$ 内にある ( $\arg \mathrm{B} = -(1/2) \arg m$ ).
$m \not\leq 0$ & $m \not\geq 1$ より $|\arg(m/(1-m))| \leq \pi$ だから，$\angle\mathrm{AOB}$ は鋭角である．
よって，$\mathsf{K}(m')/\mathsf{K}(m)$ は右半平面内にあり，

$$\therefore \quad \mathrm{Im}\,\tau = \mathrm{Re}(\mathsf{K}(m')/\mathsf{K}(m)) > 0.$$

# 母数 $k$ についての問題 (2)

**母数 $k$ についての問題 (2)：答**

テータ関数を用いて与えられた母数はもとの母数 $k$ と一致する，
i.e., $k^2 \not\leq 0$ & $k^2 \not\geq 1$ ならば，$\tau = \mathrm{i}K(k')/K(k)$ とすると，

$$k = \left( \begin{array}{l} \text{テータ関数で} \\ \text{定義された } k \end{array} \right) = \frac{\theta_2^2(0|\tau)}{\theta_3^2(0|\tau)}.$$

（証明）前項と同じ $m, m'$ を用いる．

$\tau(m) = \mathrm{i}\mathrm{K}(1-m)/\mathrm{K}(m)$ は $m \not\leq 0$ & $m \not\geq 1$ において $m$ の解析関数であり
$\operatorname{Im}\tau(m) > 0$ である．

$$\frac{\vartheta_2^2(0|\tau(m))}{\vartheta_3^2(0|\tau(m))} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+q^{2n}}{1+q^{2n-1}}\right)^4, \quad q = \exp(\mathrm{i}\pi\tau(m))$$

であり，$\operatorname{Im}\tau(m) > 0$ より $|q| < 1$ であるから，$\vartheta_2^2(0|\tau(m))/\vartheta_3^2(0|\tau(m))$ は
$m \not\leq 0$ & $m \not\geq 1$ において $m$ の解析関数である．

そして，$0 < m < 1$ において $\vartheta_2^2(0|\tau(m))/\vartheta_3^2(0|\tau(m)) = \sqrt{m} = k$ である．

ゆえに，一致の定理より，$m \not\leq 0$ & $m \not\geq 1$ 全体で同じ等式が成り立つ． ■

# まとめ

- テータ関数を用いて Jacobi 楕円関数を再定義した.
- 再定義した Jacobi 楕円関数が次を満たすことを,
  テータ関数の加法公式を用いて示した.
  - sn, ( cn, dn ) の加法定理.
  - $\mathrm{sn}^2 u + \mathrm{cn}^2 u = 1$ ( $k^2 \mathrm{sn}^2 u + \mathrm{dn}^2 u = 1$ ).
  - 微分方程式 $(\mathrm{sn}\, u)' = \mathrm{cn}\, u\, \mathrm{dn}\, u$.
  - 母数 $k$ ( $k^2 \not\leq 0$ & $k^2 \not\geq 1$ ) を先に与えたとき,
    $\tau = \mathrm{i}K(k')/K(k)$ は $\mathrm{Im}\,\tau > 0$ を満たす.
  - 母数 $k$ ( $k^2 \not\leq 0$ & $k^2 \not\geq 1$ ) を先に与えたとき,
    はじめに与えた母数 = テータ関数で定義された母数.

# （補遺）cn の加法定理

$$\mathrm{cn}(u_1+u_2)=\frac{\mathrm{cn}\,u_1\,\mathrm{cn}\,u_2-\mathrm{sn}\,u_1\,\mathrm{dn}\,u_1\,\mathrm{sn}\,u_2\,\mathrm{dn}\,u_2}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,u_1\,\mathrm{sn}^2\,u_2}.$$

テータ関数による Jacobi 楕円関数の定義を代入すると
（$v=u_1/2K, w=u_2/2K$ とおいて）

**cn の加法定理**

$$\frac{\vartheta_2}{\vartheta_0}\frac{\vartheta_2(v+w)}{\vartheta_0(v+w)}=\frac{\vartheta_2(v)\vartheta_0(v)\vartheta_2(w)\vartheta_0(w)-\vartheta_1(v)\vartheta_3(v)\vartheta_1(w)\vartheta_3(w)}{\vartheta_0^2(v)\vartheta_0^2(w)-\vartheta_1^2(v)\vartheta_1^2(w)}.$$

sn の加法定理の証明で得られた公式 (1) により，次を示せばよい．

$$\begin{aligned}&\vartheta_2(v)\vartheta_0(v)\vartheta_2(w)\vartheta_0(w)-\vartheta_1(v)\vartheta_3(v)\vartheta_1(w)\vartheta_3(w)\\&=\vartheta_2\vartheta_0\vartheta_2(v+w)\vartheta_0(v-w).\end{aligned}$$

(RII) で $v_2\to v_2+1/2+\tau/2$, $v_4\to v_4+1/2+\tau/2$ として得られる次の等式で $v_1=v_2=v, v_3=v_4=w$ とおけばよい．

$$\begin{aligned}&\vartheta_2(v_1)\vartheta_0(v_2)\vartheta_2(v_3)\vartheta_0(v_4)+\vartheta_0(v_1)\vartheta_2(v_2)\vartheta_0(v_3)\vartheta_2(v_4)\\&-\vartheta_1(v_1)\vartheta_3(v_2)\vartheta_1(v_3)\vartheta_3(v_4)-\vartheta_3(v_1)\vartheta_1(v_2)\vartheta_3(v_3)\vartheta_1(v_4)\\&=2\vartheta_2(v_1')\vartheta_0(v_2')\vartheta_2(v_3')\vartheta_0(v_4').\end{aligned}$$

# （補遺）dn の加法定理

$$\mathrm{dn}(u_1+u_2)=\frac{\mathrm{dn}\,u_1\,\mathrm{dn}\,u_2-k^2\,\mathrm{sn}\,u_1\,\mathrm{cn}\,u_1\,\mathrm{sn}\,u_2\,\mathrm{cn}\,u_2}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,u_1\,\mathrm{sn}^2\,u_2}.$$

テータ関数による Jacobi 楕円関数の定義を代入すると
（$v=u_1/2K,w=u_2/2K$ とおいて）

**dn の加法定理**

$$\frac{\vartheta_3}{\vartheta_0}\frac{\vartheta_3(v+w)}{\vartheta_0(v+w)}=\frac{\vartheta_3(v)\vartheta_0(v)\vartheta_3(w)\vartheta_0(w)-\vartheta_1(v)\vartheta_3(v)\vartheta_1(w)\vartheta_3(w)}{\vartheta_0^2(v)\vartheta_0^2(w)-\vartheta_1^2(v)\vartheta_1^2(w)}.$$

sn の加法定理の証明で得られた公式 (1) により，次を示せばよい．

$$\begin{aligned}&\vartheta_3(v)\vartheta_0(v)\vartheta_3(w)\vartheta_0(w)-\vartheta_1(v)\vartheta_2(v)\vartheta_1(v)\vartheta_2(w)\\=&\vartheta_3\vartheta_0\vartheta_3(v+w)\vartheta_0(v-w).\end{aligned}$$

(RII) で $v_2\to v_2+1/2$, $v_4\to v_4+1/2$ として得られる次の等式で
$v_1=v_2=v,v_3=v_4=w$ とおけばよい．

$$\begin{aligned}&\vartheta_3(v_1)\vartheta_0(v_2)\vartheta_3(v_3)\vartheta_0(v_4)+\vartheta_0(v_1)\vartheta_3(v_2)\vartheta_0(v_3)\vartheta_3(v_4)\\&-\vartheta_1(v_1)\vartheta_2(v_2)\vartheta_1(v_3)\vartheta_2(v_4)-\vartheta_2(v_1)\vartheta_1(v_2)\vartheta_2(v_3)\vartheta_1(v_4)\\&=2\vartheta_3(v_1')\vartheta_0(v_2')\vartheta_3(v_3')\vartheta_0(v_4').\end{aligned}$$

# $k^2\,\mathrm{sn}^2\,u+\mathrm{dn}^2\,u=1$ の証明

$k^2\,\mathrm{sn}^2\,u+\mathrm{dn}^2\,u=1$ にテータ関数による $\mathrm{sn}\,u, \mathrm{dn}\,u$ の定義を代入すると，次の式を得る．

**$k^2\,\mathrm{sn}^2\,u+\mathrm{dn}^2\,u=1$**

$$\vartheta_2^2\vartheta_1^2(v)+\vartheta_0^2\vartheta_3^2(v)=\vartheta_3^2\vartheta_0^2(v).$$

証明すべきはこの等式である．

(RI) で $v_1\to v_1+1/2$, $v_2\to v_2+1/2$ とおいて得られる次の等式で，$v_1=v_2=v$, $v_3=v_4=0$ とおけばよい．

$$\begin{aligned}
&\vartheta_1(v_1)\vartheta_1(v_2)\vartheta_2(v_3)\vartheta_2(v_4)+\vartheta_2(v_1)\vartheta_2(v_2)\vartheta_1(v_3)\vartheta_1(v_4)\\
&+\vartheta_3(v_1)\vartheta_3(v_2)\vartheta_0(v_3)\vartheta_0(v_4)+\vartheta_0(v_1)\vartheta_0(v_2)\vartheta_3(v_3)\vartheta_3(v_4)\\
&=2\vartheta_0(v_1')\vartheta_0(v_2')\vartheta_3(v_3')\vartheta_3(v_4').
\end{aligned}$$

■