楕円関数論 (19)
保型形式への入り口

緒方　秀教

電気通信大学　大学院情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻

2021 年 2 月 21 日（日）

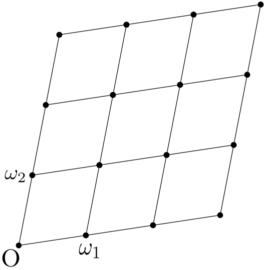
保型形式とはなにか？

テータ関数

$$\vartheta_3(v|\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} \mathrm{e}^{2n\pi \mathrm{i} v},$$

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad \mathrm{Im}\,\tau > 0, \quad q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\tau}.$$

テータ関数がパラメータ τ の関数としてどう振る舞うか，あまり考えてこなかった．



楕円関数の周期格子 Λ
（基底 $\{\,\omega_1, \omega_2\,\}$）

保型形式とは？

ざっくり言って，$\tau \in \mathbb{H}$ の正則関数．

$$\mathbb{H} = \{\, z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0 \,\} \quad \text{（上半平面）}.$$

保型形式とはなにか？

実は，我々はすでに保型形式に出会っている．

$$\text{Eisenstein 級数}\quad G_k = \sum_{\omega\in\Lambda-\{\,0\,\}} \frac{1}{\omega^k}$$
$$= \frac{1}{\omega_1^k}\sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(m\tau+n)^k} \quad (\,k=4,6,\dots\,).$$
$$g_2 = 60G_4,\qquad g_3 = 140G_6$$
$$\left(\,\wp'(u)^2 = 4\wp(u)^3 - g_2\wp(u) - g_3\,\right).$$

楕円関数論の観点から Eisenstein 級数を調べ…

$$\frac{1^5}{\mathrm{e}^{2\pi}-1}+\frac{2^5}{\mathrm{e}^{4\pi}-1}+\frac{3^5}{\mathrm{e}^{6\pi}-1}+\frac{4^5}{\mathrm{e}^{8\pi}-1}+\cdots=\frac{1}{504},\quad \text{etc.}$$

（動画「楕円関数論 (12)」）

保型形式とはなにか？

実は，我々はすでに保型形式に出会っている．

Eisenstein 級数

$$G_k = \sum_{\omega \in \Lambda - \{0\}} \frac{1}{\omega^k} = \frac{1}{\omega_1^k} \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{(m\tau + n)^k} \quad (\,k = 4, 6, \ldots\,).$$

$$g_2 = 60 G_4, \quad g_3 = 140 G_6$$

$$\left(\wp'(u)^2 = 4\wp(u)^3 - g_2 \wp(u) - g_3 \right).$$

楕円関数論の観点から Eisenstein 級数を調べ…

$$\frac{1^5}{e^{2\pi} - 1} + \frac{2^5}{e^{4\pi} - 1} + \frac{3^5}{e^{6\pi} - 1} + \frac{4^5}{e^{8\pi} - 1} + \cdots = \frac{1}{504}, \quad \text{etc.}$$

（動画「楕円関数論 (12)」）

保型形式の一般的な理論を考えれば，
また何かわかるのではないか？

$SL(2,\mathbb{Z})$ 変換に対する不変性

「上半平面 $\operatorname{Im}\tau > 0$ での正則関数」だけでは，あまりにも広漠過ぎて，何も得られないのでは？

そこで，τ が周期格子 Λ の基底の比 ($\tau = \omega_2/\omega_1$) であったことを思い出す.

$$\text{周期格子（基底}\ \{\,\omega_1, \omega_2\,\}\text{）}\quad \Lambda = \{\, m\omega_1 + n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z} \,\}.$$

$\omega_1', \omega_2' \in \Lambda$ が格子 Λ の基底をなす必要十分条件は,

$$\exists \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}) \quad \text{s.t.} \quad \begin{pmatrix} \omega_2' \\ \omega_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_2 \\ \omega_1 \end{pmatrix},$$

$$SL(2,\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad ad - bc = 1 \right\}.$$

（動画「楕円関数論 (16)」）

$SL(2,\mathbb{Z})$ 変換に対する不変性

ある周期格子 Λ の定数倍 $\alpha\Lambda$ ($\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$) は，
もとの格子 Λ と同一視できる．

∗ 2 つのトーラス $\mathbb{C}/\Lambda_1$, $\mathbb{C}/\Lambda_2$ が色んな意味で数学的に同型である
必要十分条件は，

$$\exists \alpha \in \mathbb{C} - \{0\} \quad \text{s.t.} \quad \Lambda_2 = \alpha\Lambda_1.$$

これからは，次の形の「正規化された」格子を考えることにする．

$$\Lambda(\tau) = \{ m\tau + n \mid m, n \in \mathbb{Z} \}, \quad \operatorname{Im}\tau > 0.$$

$SL(2,\mathbb{Z})$ 変換に対する不変性

ある周期格子 Λ の定数倍 $\alpha\Lambda$ ($\alpha \in \mathbb{C} - \{ 0 \}$) は,
もとの格子 Λ と同一視できる.

$*$ 2 つのトーラス $\mathbb{C}/\Lambda_1$, $\mathbb{C}/\Lambda_2$ が色んな意味で数学的に同型である
必要十分条件は,

$$\exists \alpha \in \mathbb{C} - \{ 0 \} \quad \text{s.t.} \quad \Lambda_2 = \alpha\Lambda_1 .$$

これからは, 次の形の「正規化された」格子を考えることにする.

$$\Lambda(\tau) = \{ m\tau + n \mid m, n \in \mathbb{Z} \}, \quad \operatorname{Im}\tau > 0.$$

定理 1

格子をひとつ $\Lambda(\tau)$ ($\operatorname{Im}\tau > 0$) 考える.
$\tau' \in \mathbb{H}$ が与える格子 $\Lambda(\tau')$ がもとの格子 $\Lambda(\tau)$ と同一視できる
必要十分条件は,

$$\exists \sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}) \quad \text{s.t.} \quad \tau' = \sigma(\tau) := \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

$SL(2,\mathbb{Z})$ 変換に対する不変性

$\tau \in \mathbb{H}$ を格子 $\Lambda(\tau)$ に対応させる．

$\tau \in \mathbb{H}$ の関数 $f(\tau)$ は格子の関数 $f(\Lambda(\tau))$ である．

すると，$\mathbb{H}$ 上の正則関数 $f(\tau)$ に対して，
次の条件を課すのが自然である．

$SL(2,\mathbb{Z})$ 変換に対する不変性

$$f(\tau) = f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) \quad \left(\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})\right).$$

$SL(2,\mathbb{Z})$ 変換に対する不変性

$$g_2(\tau) = 60 \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(m\tau+n)^4}, \quad g_3(\tau) = 140 \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(m\tau+n)^6}$$

これらは $SL(2,\mathbb{Z})$ 変換に対する不変性を満たす正則関数だろうか？
まず，$g_2(\tau), g_3(\tau)$ は $\mathbb{H}$ 上の正則関数である（「補遺」参照）．
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$, として，

$$\begin{aligned} g_2\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) &= 60 \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{\left(m\dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}+n\right)^4} \\ &= 60 \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{(c\tau+d)^4}{((am+cn)\tau+(bm+dn))^4} \\ &= 60 \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{(c\tau+d)^4}{(m\tau+n)^4} = (c\tau+d)^4 g_2(\tau). \end{aligned}$$

保型形式

$$g_2\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)=(c\tau+d)^4g(\tau),\quad \text{同様に}\quad g_3\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)=(c\tau+d)^6g_3(\tau).$$

残念ながら，$g_2(\tau), g_3(\tau)$ は $SL(2,\mathbb{Z})$ 変換に対して不変でない.
しかし，$SL(2,\mathbb{Z})$ 変換に対しある意味「擬不変性」を満たす.

保型形式

$$g_2\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)=(c\tau+d)^4 g(\tau),\quad \text{同様に}\quad g_3\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)=(c\tau+d)^6 g_3(\tau).$$

残念ながら，$g_2(\tau), g_3(\tau)$ は $SL(2,\mathbb{Z})$ 変換に対して不変でない．
しかし，$SL(2,\mathbb{Z})$ 変換に対しある意味「擬不変性」を満たす．

（定義）保型形式

重さ k の保型形式：上半平面 $\mathbb{H}$ 上の正則関数 $f(\tau)$ で次を満たすもの．

$$f(\tau)=(c\tau+d)^{-k} f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)\quad\left(\forall\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{Z})\right).$$

$*$ 本当はさらに，無限遠点における振る舞いに関する条件が課される．

- $g_2(\tau)$ は重さ 4 の保型形式である．
- $g_3(\tau)$ は重さ 6 の保型形式である．

楕円モジュラー関数 $J(\tau)$

では，$\mathbb{H}$ 上の正則関数で，$SL(2,\mathbb{Z})$ 変換に対して不変であるものは存在しないのか？

楕円モジュラー関数 $J(\tau)$

では，$\mathbb{H}$ 上の正則関数で，$SL(2,\mathbb{Z})$ 変換に対して不変であるものは存在しないのか？

楕円モジュラー関数

$$J(\tau) := \frac{g_2^3(\tau)}{g_2^3(\tau) - 27g_3^2(\tau)}.$$

$J(\tau)$ は $SL(2,\mathbb{Z})$ 変換で不変である $\mathbb{H}$ 上の正則関数である．

$\because$ $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ より $J(\tau)$ は $\mathbb{H}$ 上正則関数である（動画「楕円関数論 (9)」）．

$$J\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \frac{(c\tau+d)^{12}g_2^3(\tau)}{(c\tau+d)^{12}(g_2^3(\tau) - 27g_3^2(\tau))} = J(\tau).$$

楕円モジュラー関数 $J(\tau)$…楕円関数との類似

- 周期格子 $\Lambda(\tau)$：基底 $1, \tau$ …$1, \tau$ により生成される加群.

  楕円関数

  $$f(u+1) = f(u), \quad f(u+\tau) = f(u).$$

- 群 $SL(2, \mathbb{Z})$：生成元 $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

  楕円モジュラー関数 $J(\tau)$

  $$J(T(\tau)) = J(\tau+1) = J(\tau), \quad J(S(\tau)) = J\left(-\frac{1}{\tau}\right) = J(\tau).$$

  楕円モジュラー関数 $J(\tau)$ もある意味「二重周期関数」とみなせる.

$\mathbb{H}$ の同値な点，$SL(2,\mathbb{Z})$ の基本領域

$\mathbb{H}$ の同値な点

2 点 $\tau, \tau' \in \mathbb{H}$ は同値である：$\tau \equiv \tau' \mod SL(2,\mathbb{Z})$.

$$\Longleftrightarrow \quad \exists \sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}) \quad \text{s.t.} \quad \tau' = \sigma(\tau) = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

$SL(2,\mathbb{Z})$ の基本領域

$SL(2,\mathbb{Z})$ の基本領域 $\overline{F}$：$\mathbb{H}$ の領域で $\overline{F}$ が下記を満たすもの.

- 任意の $\tau \in \mathbb{H}$ に対し点 $\tau' \in \overline{F}$ で $\tau \equiv \tau' \mod SL(2,\mathbb{Z})$ を満たすものがある.
- $\tau, \tau' \in \overline{F}$, $\tau \neq \tau'$, $\tau \equiv \tau' \mod SL(2,\mathbb{Z})$ ならば $\tau, \tau' \in \partial F$.

$$\mathbb{H} = \bigcup_{\sigma \in SL(2,\mathbb{Z})} \sigma(\overline{F}).$$

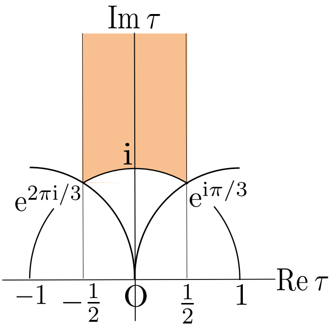
保型形式の値は，$\overline{F}$ 上の値だけで決まる.

$SL(2,\mathbb{Z})$ の基本領域

$SL(2,\mathbb{Z})$ の基本領域として
次をとることができる．

$SL(2,\mathbb{Z})$ の基本領域

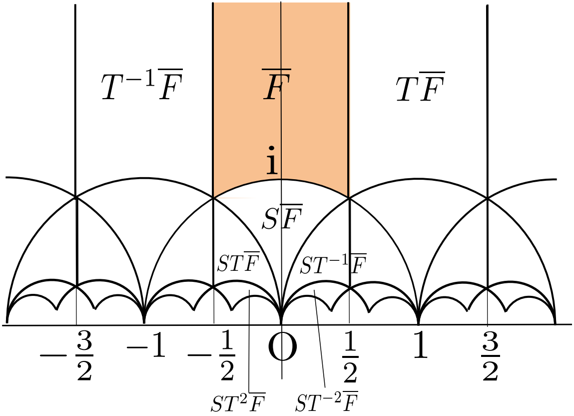
$$\overline{F} = \left\{ \tau \in \mathbb{H} \;\middle|\; |\operatorname{Re}\tau| \le \frac{1}{2}, \quad |\tau| \ge 1 \right\}.$$



上の $\overline{F}$ に対し

- 任意の $\tau \in \mathbb{H}$ に対し点 $\tau' \in \overline{F}$ で $\tau \equiv \tau' \mod SL(2,\mathbb{Z})$ を満たすものがある．
- $\tau, \tau' \in \overline{F}$, $\tau \ne \tau'$, $\tau \equiv \tau' \mod SL(2,\mathbb{Z})$ ならば $\tau, \tau' \in \partial F$.

$*$ 証明は PC スライド末尾の「補遺」に記す．



$\overline{F}$ に $SL(2,\mathbb{Z})$ の変換を施したものにより，
上半平面 $\mathbb{H}$ が埋め尽くされる様子.

$T(\tau) = \tau + 1,\quad S(\tau) = -\dfrac{1}{\tau}$ $SL(2,\mathbb{Z})$ の生成元.

楕円モジュラー関数 $J(\tau)$ の性質

$$J(\tau) = \frac{g_2^3(\tau)}{g_2^3(\tau) - 27g_3^2(\tau)},$$

$q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\tau}$ として，（動画「楕円関数論 (10, 15)」）

$$g_2^3 - 27g_3^2 = (2\pi)^{12} q^2 \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})^{24},$$

$$g_2 = \frac{4\pi^4}{3} \left\{ 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 q^{2n}}{1 - q^{2n}} \right\},$$

楕円モジュラー関数 $J(\tau)$ の性質

$$J(\tau) = \frac{g_2^3(\tau)}{g_2^3(\tau) - 27g_3^2(\tau)},$$

$q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\tau}$ として，（動画「楕円関数論 (10, 15)」）

$$g_2^3 - 27g_3^2 = (2\pi)^{12} q^2 \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})^{24},$$

$$g_2 = \frac{4\pi^4}{3} \left\{ 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 q^{2n}}{1 - q^{2n}} \right\},$$

楕円モジュラー関数 $J(\tau)$ の性質

$$J(\tau) = \frac{1}{12^3}\frac{1}{q^2} + c_0 + c_1 q^2 + c_2 q^4 + \cdots \quad (\ q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\tau}\ ),$$

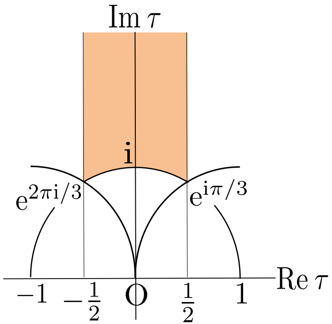
$$J(\tau) \to \infty \quad (\ \tau \to \mathrm{i}\infty\ ).$$

楕円モジュラー関数 $J(\tau)$ の性質

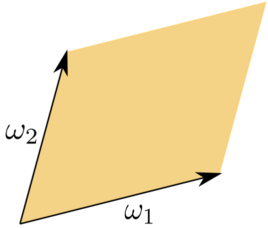
定理 2

楕円モジュラー関数 $J(\tau)$ は $\overline{F}$ において任意の値 $a \in \mathbb{C}$ を唯一度とる.

ただし, 境界 ∂F の点は互いに同値な点を一つの点とみなす. その意味で「唯一度」である.



（参考）$\wp(u)$ は周期平行四辺形において, 任意の値 $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を二度とる.



定理 2 の証明

（定理 2 の証明）はじめに次を注意しておく．

$$J(e^{i\pi/3}) = J(e^{2\pi i/3}) = 0, \quad J(i) = 1.$$

$$\because \quad \frac{1}{60} g_2(e^{i\pi/3}) = \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(me^{i\pi/3}+n)^4} = e^{-4\pi i/3} \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(m+ne^{-i\pi/3})^4}$$

$$= e^{-4\pi i/3} \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(me^{i\pi/3}+n)^4} = e^{-4\pi i/3} \frac{1}{60} g_2(e^{i\pi/3}),$$

$$g_2(e^{i\pi/3}) = 0, \quad \therefore \quad \tau = e^{i\pi/3} \text{ に対して } \quad J(\tau) = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27 g_3^2} = 0. \quad \text{etc.}$$

■

- $\tau = e^{i\pi/3}, e^{2\pi i/3}$ は $J(\tau) = 0$ の根である．
- $\tau = i$ は $J(\tau) - 1 = 0$ の根である．

定理 2 の証明は，複素関数論における偏角の原理を用いる．
$J(\tau) \to \infty \quad (\tau \to \mathrm{i}\infty)$ であるから，十分大きい $R > 0$ をとれば

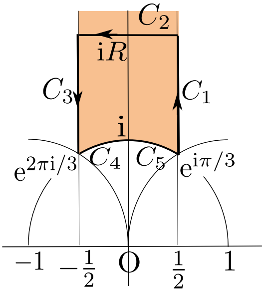
$$|J(\tau)| > |a| \quad \text{if} \quad \operatorname{Im}\tau \geq R.$$

4 つの場合に分ける．

Case 1/4 $J(\tau) = a$ なる τ が ∂F 上にないとき．$J(\tau)$ は $\overline{F}$ で正則だから極はなく，

$$N = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{C_1+\cdots+C_5} \frac{J'(\tau)}{J(\tau)-a}\mathrm{d}\tau$$
$$= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{C_1+\cdots+C_5} \mathrm{d}\arg(J(\tau)-a)$$

は F 内の $J(\tau) - a = 0$ の解の個数である．

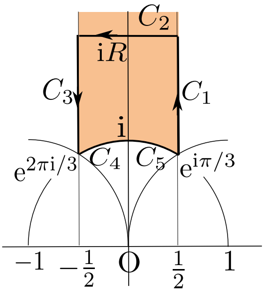


定理 2 の証明

$J(\tau+1) = J(\tau)$, $J(-1/\tau) = J(\tau)$ より

$$\int_{C_1} + \int_{C_3} = 0, \quad \int_{C_4} + \int_{C_5} = 0.$$

$$\therefore \quad N = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C_2} \mathrm{d} \arg(J(\tau) - a).$$



$\zeta = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\tau}$ とおくと，τ が C_2 上を動くとき，
ζ は円 $|\zeta| = \mathrm{e}^{-2\pi R}$ 上を負の向きに一周する．

$$J(\tau) - a = \frac{1}{12^3 \zeta} + c_0' + c_1\zeta + \cdots$$

であるから，

$$N = -\frac{1}{2\pi} \oint_{|\zeta| = \mathrm{e}^{-2\pi R}} \mathrm{d} \arg\left(\frac{1}{12^3\zeta} + c_0' + c_1\zeta + \cdots\right) = -\frac{1}{2\pi}(-2\pi) = 1.$$

ゆえに，$J(\tau) - a = 0$ は F 内部に 1 位の根をひとつ持つ．

定理 2 の証明

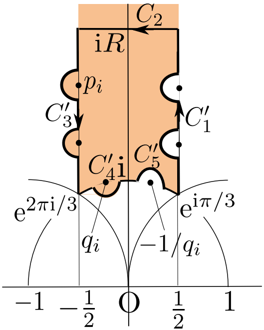
Case 2/4

$a \neq 0, 1$ かつ $J(\tau) = a$ なる τ が ∂F 上にあるとき（最初の注意より，$J(\tau) = a$ なる τ は $\mathrm{i}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}, \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$ でない），

$$\{\, \tau \in C_3 \mid J(\tau) = a \,\} = \{\, p_1, \ldots, p_r \,\},$$
$$\{\, \tau \in C_4 \mid J(\tau) = a \,\} = \{\, q_1, \ldots, q_s \,\},$$

図のように，$p_i, p_i + 1, q_i, -1/q_i$ を小円で避けるように積分路を取り直せば，Case 1/4 と同様に

$$\begin{aligned} N &= r + s \\ &\quad + (F \text{ 内部の } J(\tau) = a \text{ の解の個数}) \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{C_1 + \cdots + C_5'} \frac{J'(\tau)}{J(\tau) - a} \mathrm{d}\tau = 1. \end{aligned}$$



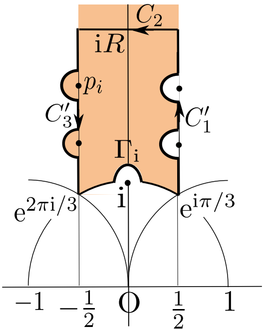
ゆえに，$r + s = 1$ であり，F 内部には $J(\tau) - a = 0$ の解 τ はない．

定理 2 の証明

Case 3/4　$a = 1$ のとき．
まず，$J(\mathrm{i}) = 1$ であることに注意する．

m : $J(\tau) - 1 = 0$ の解 $\tau = \mathrm{i}$ の重複度．

$J(\tau) - 1 = 0$ なる $\tau \in \partial F$ が $\tau = \mathrm{i}$ 以外にあれば，Case 2/4 と同様にそれらを避けて積分路を作る．



$$N = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{C_1' + \cdots} \frac{J'(\tau)}{J(\tau) - 1} \mathrm{d}\tau$$

$$= 1 + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\Gamma_{\mathrm{i}}} \frac{J'(\tau)}{J(\tau) - 1} \mathrm{d}\tau,$$

$$J(\tau) - 1 = (\tau - \mathrm{i})^m + \cdots, \quad J'(\tau) = m(\tau - \mathrm{i})^{m-1} + \cdots,$$

$$\frac{J'(\tau)}{J(\tau) - 1} = \frac{m}{\tau - 1} + \cdots, \quad N = 1 + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \times (-\mathrm{i}\pi m) = 1 - \frac{m}{2}.$$

$N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，$m \geq 1$ より $N = 0$, $m = 2$.

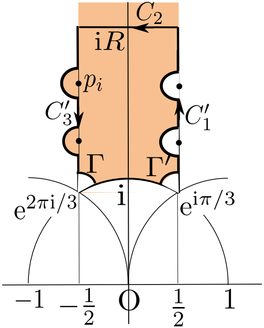
ゆえに，$J(\tau) - 1$ は $\tau = \mathrm{i}$ に 2 位の零点を持つ．他に零点はない．

定理２の証明

Case 4/4　$a=0$ のとき．
$J(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3})=J(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3})=0$ である．
$\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$ を m 位の零点とすると，

$$J(\tau+1)=J(\tau),\ \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}+1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$$

より，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ も m 位の零点である．
$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$，$\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$ 以外に ∂F 上に零点があれば，
Case 2/4 と同様にしてそれらを避けて積分路を作れば，



$$N=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_1'+\cdots}\frac{J'(\tau)}{J(\tau)}\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left(\int_{C_2}+\int_{\Gamma}+\int_{\Gamma'}\right)\frac{J'(\tau)}{J(\tau)}\mathrm{d}\tau$$
$$=1+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\times\left(-\frac{\mathrm{i}\pi}{3}m\right)+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\times\left(-\frac{\mathrm{i}\pi}{3}m\right)=1-\frac{m}{3}.$$

$N\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，$m\geq 1$ より，$N=0$，$m=3$．

ゆえに，$J(\tau)$ は $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$，$\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$ に３位の零点を持つ．■

定理２の応用：楕円曲線

楕円曲線（動画「楕円関数論 (9)」）

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3 \quad (\, g_2^3 - 27 g_3^2 \neq 0 \,),$$

$$g_2 = 60 \sum_{\omega \in \Lambda - \{\,0\,\}} \frac{1}{\omega^4}, \quad g_3 = 140 \sum_{\omega \in \Lambda - \{\,0\,\}} \frac{1}{\omega^6},$$

$$\Lambda = \{\, m\omega_1 + n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z} \,\}$$

なる ω_1, ω_2 $(\, \mathrm{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0 \,)$ があれば，$\wp$ 関数

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{\omega \in \Lambda - \{\,0\,\}} \left(\frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

を用いて，楕円曲線はパラメータ表示される．

$$(x, y) = (\wp(u), \wp'(u)) \quad (\, u \in \mathbb{C}/\Lambda \,)$$

$$\left(\, \wp'(u)^2 = 4\wp^3(u) - g_2 \wp(u) - g_3 \,\right).$$

定理２の応用：楕円曲線

楕円曲線を先に与えたとき，それを $\wp$ 関数でパラメータ表示するような格子 Λ が都合よく見つかるだろうか？つまり，

問題 1

複素数 g_2, g_3 ($g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$) を任意に与えたとき，

$$\widetilde{g_2}(\omega_1, \omega_2) := 60 \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^4} = g_2,$$

$$\widetilde{g_3}(\omega_1, \omega_2) := 140 \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^6} = g_3$$

を満たす ω_1, ω_2 ($\mathrm{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$) は存在するか？

定理２の応用：楕円曲線

楕円曲線を先に与えたとき，それを $\wp$ 関数でパラメータ表示するような格子 Λ が都合よく見つかるだろうか？つまり，

問題 1

複素数 g_2, g_3 ($g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$) を任意に与えたとき，

$$\widetilde{g_2}(\omega_1, \omega_2) := 60 \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^4} = g_2,$$

$$\widetilde{g_3}(\omega_1, \omega_2) := 140 \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^6} = g_3$$

を満たす ω_1, ω_2 ($\mathrm{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$) は存在するか？

（答）存在する．

Case 1/3　$g_2 = 0$ の場合.

定理 2 の証明で見たように $\widetilde{g_2}(1, e^{2\pi i/3}) = 0$. $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$ として,

$$\widetilde{g_3}(\alpha, \alpha e^{2\pi i/3}) = \alpha^{-6}\widetilde{g_3}(1, e^{2\pi i/3}) = g_3,$$

$$\alpha = \left(\frac{\widetilde{g_3}(1, e^{2\pi i/3})}{g_3}\right)^{1/6}$$

ととれば, $(\omega_1, \omega_2) = (\alpha, \alpha e^{2\pi i/3})$ が題意を満たす.

Case 2/3　$g_3 = 0$ の場合.

定理 2 の証明で見たように $\widetilde{g_3}(1, i) = 0$. $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$ として,

$$\widetilde{g_2}(\alpha, i\alpha) = \alpha^{-4}\widetilde{g_2}(1, i) = g_2,$$

$$\alpha = \left(\frac{\widetilde{g_2}(1, i)}{g_2}\right)^{1/4}$$

ととれば, $(\omega_1, \omega_2) = (\alpha, i\alpha)$ が題意を満たす.

定理２の応用：楕円曲線

Case 3/3　$g_2 \neq 0, g_3 \neq 0$ の場合．

問題 1 は次の問題と同じである．

問題 1′

$$\frac{\widetilde{g_2}(\omega_1,\omega_2)}{\widetilde{g_3}(\omega_1,\omega_2)} = \frac{g_2}{g_3}, \tag{1}$$

$$\frac{\widetilde{g_2}^3(\omega_1,\omega_2)}{\widetilde{g_2}^3(\omega_1,\omega_2) - 27\widetilde{g_3}^2(\omega_1,\omega_2)} = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2} \tag{2}$$

を満たす ω_1, ω_2 ($\mathrm{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$) は存在するか？

定理 2 より，$(\omega_1,\omega_2) = (1,\tau)$ が (2) を満たすような τ は存在する．

$\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$ として $(\omega_1,\omega_2) = (\alpha,\alpha\tau)$ を (1) に代入すれば，

$$\alpha^2 \frac{\widetilde{g_2}(1,\tau)}{\widetilde{g_3}(1,\tau)} = \frac{g_2}{g_3}.$$

これを満たす α をとれば，$(\omega_1,\omega_2) = (\alpha,\alpha\tau)$ は題意を満たす．　■

まとめ

- 格子 $\Lambda(\tau)$ ($\tau \in \mathbb{H}$) に対し値を対応させる関数を作ろうとした.
- 重さ k の保型形式：
  $SL(2,\mathbb{Z})$ 変換に対し次の変換性を持つ $\mathbb{H}$ 上の正則関数 $f(\tau)$.

$$f(\tau) = (c\tau + d)^{-k} f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) \quad \left(\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})\right).$$

- $g_2(\tau)$ は重さ 4 の，$g_3(\tau)$ は重さ 6 の保型形式である.
- 基本領域 $\overline{F}$：保型形式は $\overline{F}$ だけで決まる.
- 楕円モジュラー関数 $J(\tau)$：
  $SL(2,\mathbb{Z})$ 変換に対して不変な $\mathbb{H}$ 上の正則関数.
- 任意の $a \in \mathbb{C}$ に対し，$J(\tau)$ は基本領域 $\overline{F}$ 上で値 a を唯一度とる.
- （楕円曲線論）任意の $g_2, g_3 \in \mathbb{C}$ ($g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$) の値を与える格子 $\omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}$ が存在する.

（補遺） $g_2(\tau), g_3(\tau)$ が正則関数であることの証明

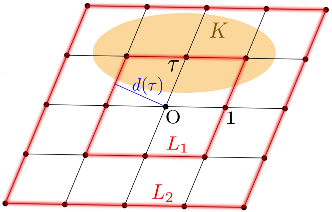
$g_2(\tau)$ についてのみ証明する． $g_3(\tau)$ の証明も同様．

級数 $\sum_{(m,n)\neq(0,0)}(m\tau+n)^{-4}$ が $\mathbb{H}$ の任意のコンパクト部分集合 K で一様収束することを示せばよい．

$k=0,1,2,\ldots$ に対し，

$$L_k := \{\, x+y\tau \mid x,y\in\mathbb{R},\ \max\{|x|,|y|\}=k \,\},$$

$$d(\tau) := \min_{z\in L_1}|z|, \quad \Lambda_k := L_k\cap\Lambda(\tau).$$



τ が K を動くとき，$d(\tau)$ は最小値 $\delta>0$ をとる．

$$\left|\sum_{(m,n)\neq(0,0)}\frac{1}{(m\tau+n)^4}\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\omega\in\Lambda_k}\frac{1}{\omega^4}\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{8k}{(kd(\tau))^4} \leq \frac{8}{\delta^4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3} < \infty.$$

ゆえに，Weierstrass の M-判定法により，$\sum_{(m,n)\neq(0,0)}(m\tau+n)^{-4}$ は K 上絶対かつ一様収束する． ■

（補遺）$SL(2,\mathbb{Z})$ の基本領域

$SL(2,\mathbb{Z})$ の基本領域

$$\overline{F} = \left\{ \tau \in \mathbb{H} \;\middle|\; |\operatorname{Re}\tau| \le \frac{1}{2} \ \& \ |\tau| \ge 1 \right\}.$$

- 任意の $\tau \in \mathbb{H}$ に対し，$\tau' \in \overline{F}$ で $\tau' \equiv \tau \mod SL(2,\mathbb{Z})$ なるものがある．
- $\tau, \tau' \in \overline{F}$, $\tau \ne \tau'$, $\tau \equiv \tau' \mod SL(2,\mathbb{Z})$ ならば，$\tau, \tau' \in \partial F$.

（証明）4 ステップに分ける．

Step 1/4　$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ($T(\tau) = \tau + 1$) は $SL(2,\mathbb{Z})$ の生成元の一つであるから，$SL(2,\mathbb{Z})$ の基本領域 $\overline{F}$ は帯状閉領域 $|\operatorname{Im}\tau| \le 1/2$ に含まれるとしてよい．

Step 2/4　$\tau \in \mathbb{H}$ に対し，$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$, とすると，

$$\operatorname{Im}\sigma(\tau) = \frac{\operatorname{Im}\tau}{|c\tau + d|^2}.$$

$$\therefore \quad \operatorname{Im}\sigma(\tau) \ge \operatorname{Im}\tau \iff |c\tau + d| \le 1.$$

（補遺）$SL(2,\mathbb{Z})$ の基本領域

$\tau \in \mathbb{H}$ を固定すると $|c\tau + d| \le 1$ を満たす $c, d \in \mathbb{Z}$ は有限個であるから，
τ と同値な τ' で $\mathrm{Im}\,\tau'$ が最大となるものがとれる．
このような τ' ($|\,\mathrm{Re}\,\tau'| \le 1/2$) を集めて集合 F_1 をつくる．
すると，この F_1 は $SL(2,\mathbb{Z})$ の基本領域である．これを示す．次は明らか．

$$\forall \tau \in \mathbb{H},\ \exists \tau' \in F_1 \quad \text{s.t.} \quad \tau' \equiv \tau \mod SL(2,\mathbb{Z}).$$

今までの議論より，この集合 F_1 は次のように表される．

$$F_1 = \left\{ \tau \in \mathbb{H} \,\middle|\, |\,\mathrm{Re}\,\tau| \le \frac{1}{2} \ \&\ |c\tau + d| \ge 1 \ \left(\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{Z} \right) \right\}.$$

ところで，初等整数論より次が成り立つ．$c, d \in \mathbb{Z}$ に対し

$$\gcd(c,d) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists a, b \in \mathbb{Z} \quad \text{s.t.} \quad ad - bc = 1$$

$$(\ \gcd(c,d)\ :\ c, d \text{ の最大公約数}\ ).$$

これを使えば，F_1 は次のようにも表される．

$$F_1 = \left\{ \tau \in \mathbb{H} \,\middle|\, |\,\mathrm{Re}\,\tau| \le \frac{1}{2} \ \&\ \text{“}c, d \in \mathbb{Z},\ \gcd(c,d) = 1 \ \Rightarrow\ |c\tau + d| \ge 1\text{''} \right\}.$$

Step 3/4 F_1 は次のようにも表される．

$$F_1 = \left\{ \tau \in \mathbb{H} \;\middle|\; |\operatorname{Re}\tau| \le \frac{1}{2} \ \&\ |\tau| \ge 1 \right\}.$$

$\because$ 右辺の集合を F_1' とおく．

($F_1 \subset F_1'$) $\tau \in F_1$ とする．c, d としてとくに $c = 1, d = 0$ をとれば $|\tau| \le 1$ を得るので，$\tau \in F_1'$.

($F_1' \subset F_1$) $\tau \in F_1'$ とする．そして，$c, d \in \mathbb{Z}$, $\gcd(c, d) = 1$ とする．$\tau = t + is$ とおくと，$t^2 + s^2 \ge 1$, $|t| \le 1/2$ を用いて，

$$\begin{aligned} |c\tau + d|^2 - 1 &= c^2(t^2 + s^2) + d^2 + 2cdt - 1 \\ &\ge c^2 + d^2 - |cd| - 1. \end{aligned}$$

$c, d \in \mathbb{Z}$, $\gcd(c, d) = 1$ より $|cd| \ge 1$ であるから，

$$|c\tau + d|^2 - 1 \ge c^2 + d^2 - 2|cd| - 1 = (|c| - |d|)^2 - 1 \ge 1 - 1 = 0.$$

$$\therefore \quad \tau \in F_1.$$

Step 4/4　次を示す．

$$\tau, \tau' \in F_1,\ \tau \neq \tau',\ \tau \equiv \tau' \mod SL(2,\mathbb{Z}) \quad \Longrightarrow \quad \tau, \tau' \in F_1$$

$\tau, \tau' \in F_1$, $\tau \neq \tau'$, $\tau \equiv \tau'$ とする．

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$$

と書け，F_1 の作り方から $\mathrm{Im}\,\tau = \mathrm{Im}\,\tau'$ であるから，$|c\tau + d| = 1$.
$\tau = t + is$ とおくと，

$$0 = |c\tau + d|^2 - 1 = c^2(t^2 + s^2) + 2cdt + d^2 - 1.$$

$\tau' = \ldots$ 右辺の分母分子に必要なら -1 を掛けて，

$$c > 0 \quad \text{または} \quad \text{“}c = 0\ \&\ d > 0$$

と仮定しておく．次の 3 通りに場合分けして調べる．

$$(1) \quad c = 0, \quad (2) \quad c > 0\ \&\ d = 0, \quad (3) \quad c > 0\ \&\ d \neq 0.$$

（補遺）$SL(2,\mathbb{Z})$ の基本領域

1. $c=0$：このとき，$d^2-1=0$, $d=1$．$ad-bc=a=1$ となり，$\tau'=\tau+a$．よって，次の場合しかあり得ない．

$$\operatorname{Re}\tau=\mp\frac{1}{2},\quad \operatorname{Re}\tau'=\pm\frac{1}{2},\quad b=\pm 1\quad\text{（複号同順）}.$$

   ゆえに，$\tau,\tau'\in\partial F_1$ である．

2. $c>0$ &$d=0$：このとき，$c^2(t^2+s^2)=1$．$t^2+s^2\geq 1$ より，$c=1$ & $t^2+s^2=1$．したがって，$|\tau|=1$ となり $\tau\in\partial F_1$．$ad-bc=-b=1$ より $b=-1$．$\tau'=a-1/\tau=a-\overline{\tau}$．
   - $|\operatorname{Re}\tau|<1/2$ のときは，$a=0$ で $\tau'=-\overline{\tau}=-1/\tau$ となり，$|\tau|=|\tau'|=1$. $\therefore\tau,\tau'\in\partial F_1$.
   - $\operatorname{Re}\tau=1/2$ のときは，$|\tau|=1$ より $\tau=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$.
     $\tau'=a-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}=a+\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$.
     $|\operatorname{Re}\tau'|\leq 1/2$, $\tau'\neq\tau$ より $a=0$, $\tau'=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$. $\therefore\tau,\tau'\in\partial F_1$.
   - $\operatorname{Re}\tau=-1/2$ のときは，$|\tau|=1$ より $\tau=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$.
     $|\operatorname{Re}\tau'|\leq 1/2$, $\tau'\neq\tau$ より $a=0$, $\tau'=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$. $\therefore\tau,\tau'\in\partial F_1$.

3. $c>0$ & $d\neq 0$：このとき，

$$0=c^2(t^2+s^2)+2cdt+d^2-1\geq c^2+d^2-|cd|-1,$$
$$c^2+d^2-|cd|\leq 1.$$

$c\leq|d|$ とすると，$1\geq c^2+d^2-d^2=c^2$ となって $c=1$.
すると，$|d|^2\leq|d|$ となり，$d=\pm 1$ を得る．

$c\geq|d|$ としても同じ結果を得る．

$c=1$, $d=1$ の場合，$(t+1)^2+s^2=1$. これと $t^2+s^2\geq 1$, $|t|\leq 1/2$, $s>0$ より，$(t,s)=(-1/2,\sqrt{3}/2)$, i.e., $\tau=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}\in\partial F_1$.

$$\tau'=\frac{a\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}+b}{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}+1}=a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}+b\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}.$$

$ad-bc=a-b=1$ より，$\tau'=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}+b$. $\therefore\ b=0,\tau'=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}\in\partial F_1$.

$c=1$, $d=-1$ の場合も同様の考察をして，
$\tau=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}\in\partial F_1$, $\tau'=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}\in\partial F_1$.

以上，いずれの場合も $\tau,\tau'\in\partial F_1$ となる．　　　　（証明了）