常微分方程式の数値解法と数値積分

緒方　秀教

電気通信大学　大学院情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻

2021 年 2 月 3 日（水）

今回のテーマ

- Runge-Kutta 法；常微分方程式の代表的な数値解法.
- Runge-Kutta 法の導出
  …数値積分公式（Simpson 則）から得られる.

常微分方程式の初期値問題に対する Runge-Kutta 法

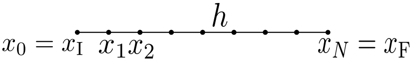
常微分方程式の初期値問題

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y) \quad (\, x_{\mathrm{I}} \leq x \leq x_{\mathrm{F}} \,),$$
$$y(x_{\mathrm{I}}) = y_{\mathrm{I}}.$$

区間 $[x_{\mathrm{I}}, x_{\mathrm{F}}]$ を N 分割：

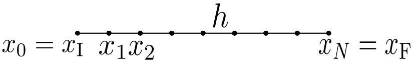
$$x_k = x_{\mathrm{I}} + kh \quad \left(k = 0, 1, 2, \ldots, N;\ h = \frac{x_{\mathrm{F}} - x_{\mathrm{I}}}{N} \right),$$
$$y_k \simeq y(x_k) \quad (\, k = 0, 1, 2, \ldots, N \,).$$

$y_0 = y_{\mathrm{I}}$ から出発して，分点 $x_1, x_2, \ldots$ における数値解 $y_1, y_2, \ldots$ を順次求めてゆく．



常微分方程式の初期値問題に対する Runge-Kutta 法

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y) \quad (\, x_{\mathrm{I}} \leq x \leq x_{\mathrm{F}} \,), \quad y(x_{\mathrm{I}}) = y_{\mathrm{I}}.$$



Runge-Kutta（ルンゲ・クッタ）法

$k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ に対し，

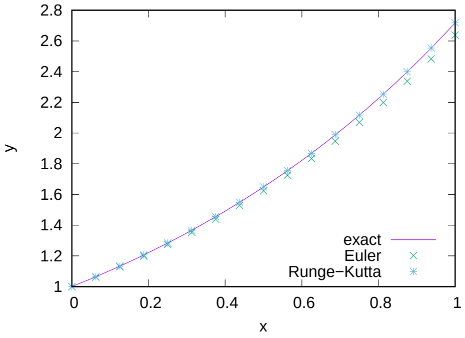
$$\left[\begin{array}{l} \kappa_1 = f(x_k, y_k); \\ \kappa_2 = f\left(x_k + \dfrac{h}{2}, y_k + \dfrac{h}{2}\kappa_1\right); \\ \kappa_3 = f\left(x_k + \dfrac{h}{2}, y_k + \dfrac{h}{2}\kappa_2\right); \\ \kappa_4 = f(x_k + h, y_k + h\kappa_3); \end{array}\right.$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(\kappa_1 + 2\kappa_2 + 2\kappa_3 + \kappa_4);$$

数値例：常微分方程式に対する Runge-Kutta 法

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y \quad (\, 0 \le x \le 1\,), \quad y(0) = 1.$$

Euler 法と Runge-Kutta 法で数値解を求めた．



$*$ Euler 法（微分を差分近似）　$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k).$

数値例：常微分方程式に対する Runge-Kutta 法

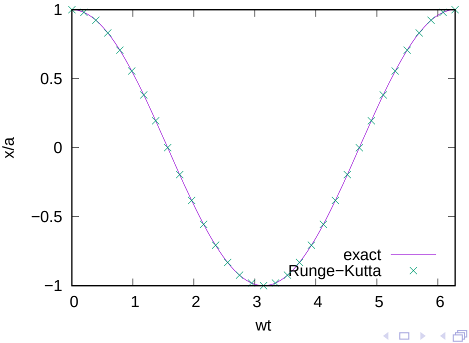
調和振動子の運動方程式.

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = x, \quad x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (\omega > 0, a : \text{const.})$$

2 階常微分方程式→

$x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ とおいて，1 階連立常微分方程式に帰着させる.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\omega^2 x_1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}.$$



数値積分：Simpson 則

求めたい積分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Simpson 則：被積分関数 $f(x)$ を 3 点

$$(a, f(a)), \quad \left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right), \quad (b, f(b))$$

を通る 2 次関数（放物線）で近似して積分する．

Simpson（シンプソン）則

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \simeq \frac{b-a}{6}\left\{f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right\}.$$

実際の数値積分では，積分区間を分割して各小区間毎に Simpson 則を適用する．

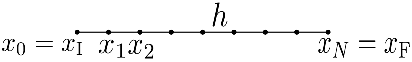
Runge-Kutta 法の導出

常微分方程式から次の**積分漸化式**を得る．

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y) \quad (\, x_{\mathrm{I}} \leq x \leq x_{\mathrm{F}} \,), \quad y(x_{\mathrm{I}}) = y_{\mathrm{I}}.$$

$$\Downarrow$$

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(\xi, y(\xi))\mathrm{d}\xi \quad (\, k = 0,1,2,\ldots,N-1 \,).$$



右辺の**積分を Simpson 則で近似する．**

$$y(x_{k+1}) \simeq y(x_k) + \frac{h}{6}\left\{ f(x_k, y(x_k)) + 4f(x_{k+1/2}, y(x_{k+1/2})) + f(x_{k+1}, y(x_{k+1})) \right\}$$

$$(\, k = 0,1,2,\ldots,N-1, \; x_{k+1/2} = x_k + h/2 \,).$$

$y(x_{k+1/2}), y(x_{k+1})$ は未知量→既知の量で近似．

Runge-Kutta 法の導出

積分漸化式の Simpson 則近似.

$$y(x_{k+1}) \simeq y(x_k) + \frac{h}{6}\left\{ f(x_k, y(x_k)) + 4f(x_{k+1/2}, y(x_{k+1/2})) + f(x_{k+1}, y(x_{k+1})) \right\}$$

$$\begin{aligned}
y(x_k) &\simeq y_k, \\
y'(x_k) &= f(x_k, y(x_k)) \simeq f(x_k, y_k) =: \kappa_1, \\
y(x_{k+1/2}) &\simeq y(x_k) + \frac{h}{2} y'(x_k) \simeq y_k + \frac{h}{2}\kappa_1, \\
y'(x_{k+1/2}) &= f(x_{k+1/2}, y(x_{k+1/2})) \simeq f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}\kappa_1\right) =: \kappa_2, \\
y(x_{k+1/2}) &\simeq y(x_k) + \frac{h}{2} y'(x_{k+1/2}) \simeq y_k + \frac{h}{2}\kappa_2, \\
y'(x_{k+1/2}) &= f(x_{k+1/2}, y(x_{k+1/2})) \simeq f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}\kappa_2\right) =: \kappa_3, \\
y(x_{k+1}) &\simeq y(x_k) + h y'(x_{k+1/2}) \simeq y_k + h\kappa_3, \\
& f(x_{k+1}, y(x_{k+1})) \simeq f(x_k + h, y_k + h\kappa_3) =: \kappa_4.
\end{aligned}$$

Runge-Kutta 法の導出

整理すると，

$$y(x_{k+1}) \simeq y(x_k) + \frac{h}{6}\{\underbrace{f(x_k, y(x_k))}_{(1)} + 4\underbrace{f(x_{k+1/2}, y(x_{k+1/2}))}_{(2)} + \underbrace{f(x_{k+1}, y(x_{k+1}))}_{(3)}\}$$

$$\begin{aligned}
f(x_k, y(x_k)) &\simeq f(x_k, y_k) =: \kappa_1, \\
f(x_{k+1/2}, y(x_{k+1/2})) &\simeq f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}\kappa_1\right) =: \kappa_2, \\
f(x_{k+1/2}, y(x_{k+1/2})) &\simeq f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}\kappa_2\right) =: \kappa_3, \\
f(x_{k+1}, y(x_{k+1})) &\simeq f(x_k + h, y_k + h\kappa_3) =: \kappa_4.
\end{aligned}$$

$(1) \simeq \kappa_1$, $(2) \simeq (\kappa_2 + \kappa_3)/2$, $(3) \simeq \kappa_4$ とすると，Runge-Kutta 法を得る．

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(\kappa_1 + 2\kappa_2 + 2\kappa_3 + \kappa_4).$$

まとめ

- Runge-Kutta 法：標準的な常微分方程式の数値解法.
- Simpson 則：数値積分公式.
- Runge-Kutta 法は Simpson 則を用いて導出することができる.
  - 常微分方程式→積分漸化式.
  - 積分漸化式に現れる積分を Simpson 則で近似する.
  - そして，必要な近似を行う.