バーゼル問題を高校数学で解く

緒方　秀教

電気通信大学　大学院情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻

2021 年 2 月 26 日（金）

バーゼル問題

バーゼル (Basel) 問題

次の無限級数の値を求めよ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots .$$

バーゼル問題

バーゼル (Basel) 問題

次の無限級数の値を求めよ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots .$$

バーゼル問題の答

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

オイラー (L. Euler, 1707–1783) が最初に解決した.

バーゼル問題：オイラーによる解法

∗ オイラーの解法に若干アレンジを加えています.
$\sin x$ の無限積展開を用いる.

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{x^2}{(n\pi)^2} \right\} = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{(2\pi)^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{(3\pi)^3}\right) \cdots .$$

最右辺の積を展開すると,

$$\sin x = x - \frac{1}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right) x^3 + \cdots .$$

両辺を x について 3 回微分して,

$$-\cos x = -\frac{6}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right) + (x^2, x^4, \ldots \text{の項}),$$

$x = 0$ とおいて,

$$-1 = -\frac{6}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right), \quad \therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

バーゼル問題の他の解法（いずれも大学 2 年生の数学のレベル）

- フーリエ解析による方法.
- $\pi \cot \pi x = \dfrac{\pi}{\tan \pi x}$ のローラン (Laurent) 級数展開を用いる方法.

バーゼル問題：他の解法

バーゼル問題の他の解法（いずれも大学 2 年生の数学のレベル）

- フーリエ解析による方法.
- $\pi \cot \pi x = \dfrac{\pi}{\tan \pi x}$ のローラン (Laurent) 級数展開を用いる方法.

ところが，高校数学レベルでバーゼル問題を解く方法がある.

- 大学入試過去問：2003 年，日本女子大学理学部，自己推薦入試.

（参考 Web サイト）

受験の月（学校では教えてくれない受験のための数学・物理・科学）

https://examist.jp/legendexam/2003-nihonjyoshi/

n を正の整数または 0 とする．次の (1)~(7) に答えよ．

1. 次の式を示せ．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx.$$

2. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ とおく．次の式を示せ．

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (\, n \geqq 2\,).$$

3. 次の式を示せ．

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdots \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{2} & (n \text{ が偶数のとき}) \\ \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdots \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{2}{3} & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

4. $S_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^{2n} x dx$ とおく．次の式を示せ．

$$S_{n-1} - \frac{2n}{2n-1} S_n = \frac{2}{2n(2n-1)} I_{2n} \quad (\, n \geqq 1\,)$$

5. 次の式を示せ．ただし，N は整数で $N \geqq 1$ とする．

$$S_N = \frac{(2N-1)(2N-3)\cdots 5\cdot 3\cdot 1}{(2N)(2N-2)\cdots 4\cdot 2} \cdot \frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \right)$$

6. 次の式を示せ．ただし，N は整数で $N \geqq 1$ とする．

$$S_N \leqq \frac{1}{2N+2} \cdot \frac{(2N-1)(2N-3)\cdots 5\cdot 3\cdot 1}{(2N)(2N-2)\cdots 4\cdot 2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^3$$

なお，$0 < x < \frac{\pi}{2}$ で $x < \frac{\pi}{2} \sin x$ であることを用いてよい．

7. 次の式を示せ．

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

以下では，日本女子大学入試過去問の誘導に沿って，高校数学による
バーゼル問題の解法を示す．

以下，次の記号を用いる．

$$n!! = \begin{cases} n(n-2)(n-4)\cdots 4\cdot 2 & (n\text{ は偶数}) \\ n(n-2)(n-4)\cdots 3\cdot 1 & (n\text{ は奇数}) \end{cases} \quad (\,n = 1, 2, \ldots\,),$$

$$0!! = (-1)!! = 1.$$

*

- 以下の解答は日本女子大学が公開したものではありません．
- この動画の内容を受験勉強などに用いる場合は，自己責任でお願いします．

Step 1/3 $\quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \mathrm{d}x \quad (\, n = 0, 1, 2, \ldots \,)$ とおくと,

$$(1) \quad I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (\, n \geq 2 \,),$$

$$(2) \quad I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (\, n = 0, 1, 2, \ldots \,).$$

$\because$ (1) 部分積分を用いて,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 x) \cos^{n-2} x \mathrm{d}x = I_{n-2} - \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^{n-2} x \mathrm{d}x \\ &= I_{n-2} + \frac{1}{n-1} \int_0^{\pi/2} \sin x (\cos^{n-1} x)' \mathrm{d}x \\ &= I_{n-2} + \frac{1}{n-1} \left\{ \Big[\sin x \cos^{n-1} x \Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (\sin x)' \cos^{n-1} x \mathrm{d}x \right\} \\ &= I_{n-2} - \frac{1}{n-1} I_n. \end{aligned}$$

これを I_n について解けば,題意の等式を得る.(1) と $I_0 = \pi/2$ より (2) を得る.

Step 2/3

$$S_n := \int_0^{\pi/2} x^2 \cos^{2n} x\mathrm{d}x = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right) \quad (\, n = 1, 2, \ldots\,).$$

$\because$　まず，S_n に対する漸化式を求める．部分積分により，

$$\begin{aligned}
S_n &= \int_0^{\pi/2} x^2 (1 - \sin^2 x) \cos^{2n-2} x\mathrm{d}x = S_{n-1} - \int_0^{\pi/2} x^2 \sin^2 x \cos^{2n-2} x\mathrm{d}x \\
&= S_{n-1} + \frac{1}{2n-1} \int_0^{\pi/2} x^2 \sin x (\cos^{2n-1} x)' \mathrm{d}x \\
&= S_{n-1} - \frac{1}{2n-1} \int_0^{\pi/2} (x^2 \sin x)' \cos^{2n-1} x\mathrm{d}x \\
&= S_{n-1} - \frac{1}{2n-1} \int_0^{\pi/2} (x^2 \cos x + 2x \sin x) \cos^{2n-1} x\mathrm{d}x \\
&= S_{n-1} - \frac{1}{2n-1} S_n - \frac{2}{2n-1} \int_0^{\pi/2} x \sin x \cos^{2n-1} x\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

S_n について解いて，

$$\frac{2n}{2n-1}S_n = S_{n-1} - \frac{2}{2n-1}\int_0^{\pi/2} x\sin x\cos^{2n-1} x\mathrm{d}x. \tag{1}$$

右辺の積分を部分積分と Step 1/3 の結果により求めると，

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} x\sin x\cos^{2n-1} x\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2n}\int_0^{\pi/2} x(\cos^{2n} x)'\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2n}\underbrace{\int_0^{\pi/2}\cos^{2n} x\mathrm{d}x}_{I_{2n}} = \frac{1}{2n}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

これを (1) に代入して整理すると，

$$S_n = \frac{2n-1}{2n}S_{n-1} - \frac{1}{2n^2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}. \tag{2}$$

高校数学によるバーゼル問題の解法

$$S_n = \frac{2n-1}{2n} S_{n-1} - \frac{1}{2n^2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}. \tag{2}$$

(2) で $n \to n-1$ と置いて得られる式

$$S_{n-1} = \frac{2n-3}{2n-2} S_{n-2} - \frac{1}{2(n-1)^2} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

を再び (2) に代入して,

$$S_n = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} S_{n-2} - \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{4} \left\{ \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n-1)^2} \right\}.$$

同様の操作を繰り返して,

$$S_n = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-5}{2n-4} S_{n-3} - \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{4} \left\{ \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{(n-2)^2} \right\},$$

$$\cdots,$$

$$\therefore \quad S_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(S_0 - \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \right) = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \right).$$

高校数学によるバーゼル問題の解法

Step 3/3　$0 < x < \pi/2$ のとき $x < (\pi/2)\sin x$（グラフを描けばわかる）を用いて，

$$S_n = \int_0^{\pi/2} x^2 \cos^{2n} x \mathrm{d}x \leq \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^{2n} x \mathrm{d}x.$$

最右辺の積分を今までと同様に部分積分により計算して，

$$0 \leq S_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \right) \leq \frac{1}{2n+2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{\pi}{2} \right)^3,$$

$$0 \leq \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \right) \leq \frac{1}{2n+2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^3.$$

$n \to \infty$ とすると，最右辺 $\to 0$ となるから，

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \right) = 0.$$

（バーゼル問題の解法終わり）

最後に

発展

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}=\pi^{2k}\times(\text{有理数})\quad (k=1,2,\dots).$$

バーゼル問題の解法では，積分

$$S_n=\int_0^{\pi/2}x^2\cos^{2n}x\,\mathrm{d}x$$

が鍵を握っていた．

上の「発展」についても，上と類似の積分を考えることにより
証明が得られるだろうか？