

楕円関数論 (20) 保型形式 (2)

緒方 秀教

電気通信大学 大学院情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻

2021 年 3 月 1 日 (月)

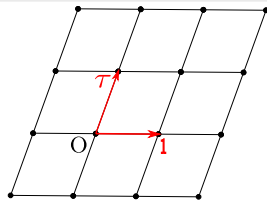
(復習) 格子, 群 $SL(2, \mathbb{Z})$, $\mathbb{H}$ の点の同値

上半平面 $\mathbb{H} = \{ \tau \in \mathbb{C} \mid \text{Im } \tau > 0 \}$.

(規格化された) 格子 $\Lambda(\tau)$ ($\tau \in \mathbb{H}$)

$$\Lambda(\tau) = \{ m\tau + n \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$

(基底 $\{1, \tau\}$).



格子 $\Lambda(\tau)$

格子 $\Lambda(\tau)$ の基底の取り換え.

$$\tau \mapsto \tau' = \sigma(\tau) = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}),$$

$$\text{群 } SL(2, \mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad ad - bc = 1 \right\}.$$

$\tau' \in \mathbb{H}$ は $\tau \in \mathbb{H}$ と同値である: $\tau' \equiv \tau \pmod{SL(2, \mathbb{Z})}$

$$\stackrel{\text{def.}}{\iff} \exists \sigma \in SL(2, \mathbb{Z}) \quad \text{s.t.} \quad \tau' = \sigma(\tau).$$

(復習) 基本領域

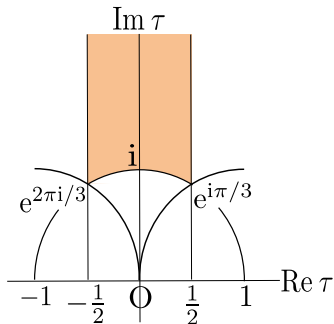
$SL(2, \mathbb{Z})$ の基本領域

$$F = \left\{ \tau \in \mathbb{H} \mid |\operatorname{Re} \tau| < \frac{1}{2}, \quad |\tau| < 1 \right\},$$

$$\mathbb{H} = \bigcup_{\sigma \in SL(2, \mathbb{Z})} \sigma(\overline{F}).$$

- 保型形式.
- 楕円モジュラー関数 $J(\tau)$.

これらの関数は $\overline{F}$ だけで
完全に決まってしまう。



今回の内容

* 以降, 慣習に従って $\Gamma := SL(2, \mathbb{Z})$ と記す.

- 楕円モジュラー関数 $J(\tau)$, $\Gamma \backslash \overline{\mathbb{H}} \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.
- 保型形式, 尖点形式 (前回よりちゃんと定義する).
 - Eisenstein 級数.
 - 保型形式の零点に関する基本定理.
- 保型形式の空間の構造.

すべての保型形式は Eisenstein 級数 $E_4(\tau), E_6(\tau)$ ($g_2(\tau), g_3(\tau)$) の多項式で表される.

楕円モジュラー関数 $J(\tau)$

楕円モジュラー関数 $J(\tau)$

$$J(\tau) := \frac{g_2^3(\tau)}{g_2^3(\tau) - 27g_3^2(\tau)},$$

$$g_2(\tau) = 60 \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 - \{ (0,0) \}} \frac{1}{(m\tau + n)^4},$$

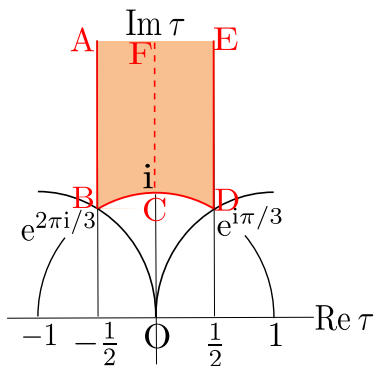
$$g_3(\tau) = 140 \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 - \{ (0,0) \}} \frac{1}{(m\tau + n)^6}.$$

定理

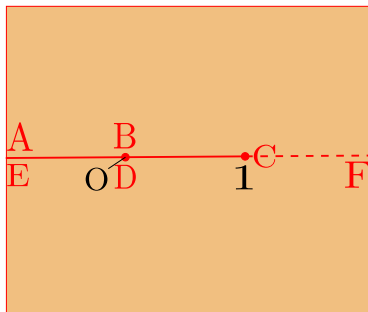
- $J(\tau)$ は $\mathbb{H}$ 上の正則関数である. $J(i\infty) = \infty$.
- $J(\sigma(\tau)) = J(\tau) \quad (\forall \sigma \in \Gamma)$.
- すべての $a \in \mathbb{C}$ に対し $J(\tau) = a$ なる $\tau \in \overline{F}$ が唯一つ存在する.
* 境界 ∂F の同値な二点は適当に同一視する.

楕円モジュラー関数 $J(\tau)$

$$\bar{F} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \tau \mapsto J(\tau) \quad (\text{全射}).$$



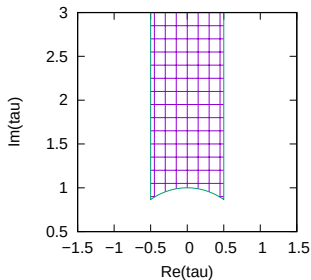
基本領域 F (τ -平面)



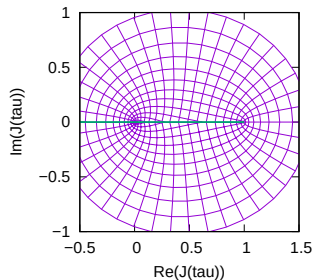
$J(\tau)$ -平面

楕円モジュラー関数 $J(\tau)$

$$\overline{F} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \tau \mapsto J(\tau) \quad (\text{全射}).$$



τ -平面



$J(\tau)$ -平面

楕円モジュラー関数 $J(\tau)$

上半平面 $\mathbb{H}$ を拡張する.

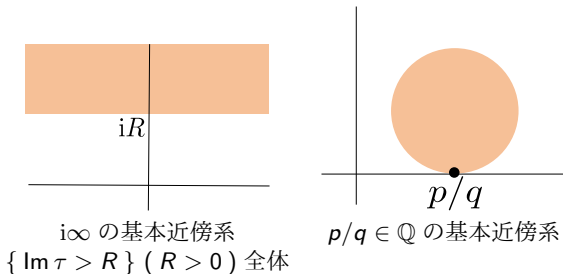
$$\overline{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \{i\infty\} \cup \mathbb{Q} \quad (\mathbb{Q} : \text{有理数の集合}).$$

* 任意の既約分数 p/q に対し, 初等整数論 (Euclid の互除法) により,

$$\exists r, s \in \mathbb{Z} \quad \text{s.t.} \quad ps - qr = 1.$$

$$\frac{p}{q} = \sigma(i\infty), \quad \sigma = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} \in \Gamma, \quad \therefore \quad \frac{p}{q} \equiv i\infty \pmod{\Gamma}.$$

* $\overline{\mathbb{H}}$ の位相.



$\Gamma \backslash \overline{\mathbb{H}} := \{ \overline{\mathbb{H}} \text{ の “ mod } \Gamma” \text{ による同値類 } \}$
= ($\overline{\mathbb{H}}$ で Γ に関して同値な二点を同一視したもの).

楕円モジュラー関数 $J(\tau)$

$\Gamma \backslash \overline{\mathbb{H}} := \{ \overline{\mathbb{H}} \text{ の “ mod } \Gamma” \text{ による同値類} \}$
= ($\overline{\mathbb{H}}$ で Γ に関して同値な二点を同一視したもの).

定理

楕円モジュラー関数 $J(\tau)$ は次の全単射を与える.

$$\Gamma \backslash \overline{\mathbb{H}} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{ \infty \}, \quad [\tau] \mapsto J(\tau)$$

*

双正則同型 $\Gamma \backslash \overline{\mathbb{H}} \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{ \infty \},$

$\Gamma \backslash \overline{\mathbb{H}} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \tau \mapsto J(\tau)$ および逆写像は正則な全単射である.

$\Gamma = SL(2, \mathbb{Z})$ に関する重さ k の保型形式

$\mathbb{H}$ 上の正則関数 $f(\tau)$ で次を満たすもの.

- $SL(2, \mathbb{Z})$ 変換に対し次を満たす.

$$f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k f(\tau) \quad \left(\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma = SL(2, \mathbb{Z}). \right).$$

- 前項より $f(\tau + 1) = f(\tau)$ であり $f(\tau)$ は Fourier 級数展開されるが, その Fourier 級数は次の形である.

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n q^n \quad (q = e^{2\pi i \tau})$$

($n < 0$ の項はゼロである).

$M_k(\Gamma) := \{ \Gamma \text{ に関する重さ } k \text{ の保型形式} \}$ (複素ベクトル空間).

Γ に関する重さ k の尖点形式

Γ に関する重さ k の保型形式 $f(\tau)$ で、さらに次を満たすもの.

- $f(i\infty) = 0$, i.e., $f(\tau)$ の Fourier 級数展開

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n q^n \quad (q = e^{2\pi i \tau})$$

において $c_0 = 0$ である.

$S_k(\Gamma) := \{ \Gamma \text{ に関する重さ } k \text{ の尖点形式} \}$ ($M_k(\Gamma)$ の部分ベクトル空間).

Γ に関する重さ k の尖点形式

Γ に関する重さ k の保型形式 $f(\tau)$ で、さらに次を満たすもの.

- $f(i\infty) = 0$, i.e., $f(\tau)$ の Fourier 級数展開

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n q^n \quad (q = e^{2\pi i \tau})$$

において $c_0 = 0$ である.

$S_k(\Gamma) := \{ \Gamma \text{ に関する重さ } k \text{ の尖点形式} \}$ ($M_k(\Gamma)$ の部分ベクトル空間).

無限遠点での正則性.

- 通常関数論 : 負ベキ級数で考える.

$$f(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \cdots \quad (z \rightarrow \infty).$$

- 保型形式 : 周期 1 の周期関数, $i\infty \rightarrow$ Fourier 級数で考える.

$$f(\tau) = c_0 + c_1 q + c_2 q^2 + \cdots \quad (q = e^{2\pi i \tau}).$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\left(T(\tau) = \tau + 1, \quad S(\tau) = -\frac{1}{\tau} \right)$$

は $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z})$ の生成元である.

↓

$\tau = i\infty$ で正則な $\mathbb{H}$ 上の正則関数 $f(\tau)$ に対し, $f(\tau)$ が重さ k の保型形式 $f(\tau)$ であることと次の条件は同値である.

$$f(\tau + 1) = f(\tau), \quad f\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^k f(\tau).$$

保型形式：格子の基底の取り換えに対する不変性

* 前回の動画（楕円関数論 (19)）で、「重さ $k \neq 0$ の保型形式は格子の基底の取り換えに対する不変性を満たさない」と言ったのは、誤解があったかもしれない。 $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$, $\text{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$ （格子の基底）として、

$$f \in M_k(\Gamma) \quad \longrightarrow \quad \tilde{f}(\omega_1, \omega_2) := \frac{1}{\omega_1^k} f\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$$

$\tilde{f}(\omega_1, \omega_2)$ は格子の基底の取り換え $\{\omega_1, \omega_2\} \rightarrow \{\omega'_1, \omega'_2\}$,

$$\begin{pmatrix} \omega'_2 \\ \omega'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_2 \\ \omega_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$$

に対する不変性を満たす： $\tilde{f}(\omega'_1, \omega'_2) = \tilde{f}(\omega_1, \omega_2)$. 実際、

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\omega'_1, \omega'_2) &= \tilde{f}(c\omega_2 + d\omega_1, a\omega_2 + b\omega_1) = \frac{1}{(c\omega_2 + d\omega_1)^k} f\left(\frac{a\omega_2 + b\omega_1}{c\omega_2 + d\omega_1}\right) \\ &= \frac{1}{(c\omega_2 + d\omega_1)^k} f\left(\frac{a\omega_2/\omega_1 + b}{c\omega_2/\omega_1 + d}\right) = \frac{(c\omega_2/\omega_1 + d)^k}{(c\omega_2 + d\omega_1)^k} f\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) \\ &= \frac{1}{\omega_1^k} f\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) = \tilde{f}(\omega_1, \omega_2). \end{aligned}$$

Eisenstein 級数

$$G_{2k}(\tau) := \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 - \{(0,0)\}} \frac{1}{(m\tau + n)^{2k}} \quad (\tau \in \mathbb{H}; k = 2, 3, \dots).$$

- $G_{2k}(\tau)$ は重さ $2k$ の保型形式である.
- $g_2(\tau) = 60G_4(\tau)$, $g_3(\tau) = 140G_6(\tau)$.
- Eisenstein 級数の Fourier 級数展開 (動画「楕円関数論 (12)」).

$$G_{2k}(\tau) = 2\zeta(2k) + (-1)^k \frac{2(2\pi)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) q^n,$$

$$q = e^{2\pi i \tau}, \quad \sigma_{2k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{2k-1} \quad (d|n : d \text{ は } n \text{ を割り切る}).$$

保型形式 : Eisenstein 級数

正規化された Eisenstein 級数

$G_{2k}(\tau)$ を $q = e^{2\pi i\tau}$ のベキ級数とみなしたとき,
定数項 = 1 となるよう正規化したもの.

$$E_{2k}(\tau) := \frac{G_{2k}(\tau)}{2\zeta(2k)} = 1 - \frac{4k}{B_{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) q^n.$$

* B_k : Bernoulli 数.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k = \frac{x}{e^x - 1},$$

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \dots$$

$$B_{2k+1} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

$$E_{2k}(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2, \gcd(m,n)=1} \frac{1}{(m\tau + n)^{2k}}.$$

保型形式 : Eisenstein 級数

$$g_2(\tau) = \frac{4}{3}\pi^4 E_4(\tau), \quad E_4(\tau) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n,$$

$$g_3(\tau) = \frac{8}{27}\pi^6 E_6(\tau), \quad E_6(\tau) = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) q^n$$

$$\left(q = e^{2\pi i \tau}, \quad \sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k \right),$$

$$\begin{aligned} \Delta(\tau) &= g_2^3(\tau) - 27g_3^2(\tau) \\ &= \frac{(2\pi)^{12}}{12^3} \{E_4^3(\tau) - E_6^2(\tau)\} = (2\pi)^{12} q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24}, \end{aligned}$$

($\Delta(\tau)$ は重さ 12 の尖点形式である)

$$J(\tau) = \frac{g_2^3(\tau)}{\Delta(\tau)} = \frac{E_4^3(\tau)}{E_4^3(\tau) - E_6^2(\tau)}, = \frac{1}{12^3} \frac{1}{q} + c_0 + c_1 q + \cdots.$$

保型形式の構造

保型形式空間 $M_k(\Gamma)$ の構造を調べる．まず，次の定理を準備する．

保型形式の構造

保型形式空間 $M_k(\Gamma)$ の構造を調べる． まず， 次の定理を準備する．

定理 1 : 保型形式の零点の位数

$f(\neq 0)$ を $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z})$ に関する重さ k の保型形式とする．

- $v_a(f)$ ($a \neq \infty$) : $f(\tau)$ の $\tau = a$ での零点の位数．
- $v_\infty(f)$: f の Fourier 級数展開 $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$ ($q = e^{2\pi i \tau}$) の，
 q の関数としての $q = 0$ ($\tau = i\infty$) での零点の位数．

このとき，

$$v_\infty(f) + \frac{1}{2}v_i(f) + \frac{1}{3}v_\omega(f) + \sum_{a \in \overline{F} - \{i, \omega, -\omega^2, i\infty\}} v_a(f) = \frac{k}{12}$$
$$(\omega = e^{2\pi i/3}, \quad -\omega^2 = e^{i\pi/3}).$$

* $a \in \partial F - \{i, \omega, -\omega^2, i\infty\}$ に f の零点があるとき a と同値な他の 1 点 a' にも零点があるが， その一方のみ上記の和に参入する．

保型形式の構造：定理1の証明

(証明) 偏角の原理より,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C'_1 + \dots} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} d\tau = \sum_{a \in \overline{F} - \{i, \omega, -\omega^2, i\infty\}} v_a(f).$$

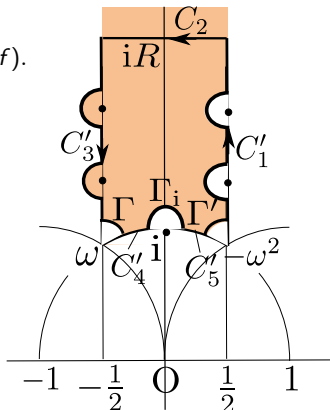
左辺の積分を調べる. $f(\tau+1) = f(\tau)$ より,

$$\int_{C'_1} + \int_{C'_3} = 0.$$

$$f(\tau) = \tilde{f}(q) = \sum_{n \geq 0} a_n q^n \quad (q = e^{2\pi i \tau})$$

とすると, $f'(\tau) = \frac{d\tilde{f}(q)}{dq} \frac{dq}{d\tau}$ であるから,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|q|=e^{-2\pi R}} \frac{\tilde{f}'(q)}{\tilde{f}(q)} dq = -v_\infty(f).$$

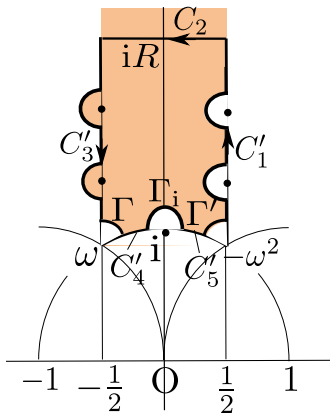


保型形式の構造：定理1の証明

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} d\tau &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi i} \times \left\{ -\frac{i\pi}{3} v_{\omega}(f) \right\} = -\frac{1}{6} v_{\omega}(f). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_i} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} d\tau &= \frac{1}{2\pi i} \times \{ -i\pi v_i(f) \} \\ &= -\frac{1}{2} v_i(f). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{C'_5} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} d\tau &= \int_{C'_5} d \log f(\tau) \\ &= - \int_{C'_4} d \log f \left(-\frac{1}{\tau} \right) \\ &= - \int_{C'_4} d \log \left[\tau^k f(\tau) \right] = -k \int_{C'_4} d \log \tau - \int_{C'_4} d \log f(\tau) = \frac{i\pi k}{6} - \int_{C'_4} d \log f(\tau). \end{aligned}$$



保型形式の構造：定理1の証明

以上をまとめると,

$$\sum_a v_a(f) = -v_\infty(f) - \frac{1}{6}v_\omega(f) - \frac{1}{2}v_i(f) + \frac{k}{12}$$

となり, 題意の等式を得る. ■

保型形式の構造：定理1の証明

以上をまとめると,

$$\sum_a v_a(f) = -v_\infty(f) - \frac{1}{6}v_\omega(f) - \frac{1}{2}v_i(f) + \frac{k}{12}$$

となり, 題意の等式を得る. ■

$$v_\infty(f) + \frac{1}{2}v_i(f) + \frac{1}{3}v_\omega(f) + \sum_{a \in \overline{F} - \{i, \omega, -\omega^2, i\infty\}} v_a(f) = \frac{k}{12}$$

↓

この等式から, 保型形式の空間の構造が決まる.

定理 2 : 保型形式の構造

$\Gamma = SL(2, \mathbb{Z})$, k を偶数とする.

① $k < 0$ のとき, $M_k(\Gamma) = 0$.

② $M_0(\Gamma) = \mathbb{C}$.

③ $M_2(\Gamma) = 0$.

④ $k = 4, 6, 8, 10, 14$ に対して, $M_k(\Gamma) = \mathbb{C}E_k(\tau) \simeq \mathbb{C}$.

⑤

$$S_k(\Gamma) = \begin{cases} 0 & (k < 12, k = 14) \\ \mathbb{C}\Delta(\tau) & (k = 12) \\ \Delta(\tau)M_{k-12}(\Gamma) & (k \geq 14). \end{cases}$$

⑥ $k \geq 4$ に対して

$$M_k(\Gamma) = S_k(\Gamma) \oplus \mathbb{C}E_k(\tau).$$

定理 2' : 保型形式の構造

k を偶数とする.

- ① 重さ $k < 0$ の保型形式は 0 だけである.
- ② 重さ 0 の保型形式は定数関数だけである.
- ③ 重さ 2 の保型形式は 0 だけである.
- ④ $k = 4, 6, 8, 10, 14$ に対して, 重さ k の保型形式は $\text{const.} \times E_k(\tau)$ と表される.
- ⑤ 尖点形式 f ($f(i\infty) = 0$ なる保型形式) は
 - $k < 12$ または $k = 14$ のとき, 0 に限られる.
 - $k = 12$ のとき, $\text{const.} \times \Delta(\tau)$ に限られる.
 - $k \geq 16$ のとき, $\Delta(\tau) \times$ (重さ $k - 12$ の保型形式) である.
- ⑥ $k \geq 4$ に対して, 重さ k の保型形式は次の形である.

重さ k の尖点形式 + $\text{const.} \times E_k(\tau)$.

保型形式の構造：定理 2' の証明

(証明)

$$v_{\infty}(f) + \frac{1}{2}v_i(f) + \frac{1}{3}v_{\omega}(f) + \sum_{a \in \overline{F} - \{i, \omega, -\omega^2, i\infty\}} v_a(f) = \frac{k}{12} \quad (1)$$

- ❶ (1) 左辺 ≥ 0 より $k \geq 0$ だから、重さ $k < 0$ の保型形式は 0 しかない.
- ❷ f を重さ 0 の保型形式とし、 c を f が取りうる任意の値とする.
 $f_1 := f - c$ は重さ 0 の保型形式である.
 $f_1 \neq 0$ と仮定すると、(1) 左辺はどれかの項が正となるので
左辺 > 0 となるが、右辺 $= 0$ なので矛盾.
よって、 $f_1 = 0$ すなわち $f = c$ となり、 f は定数関数となる.
- ❸ $k = 2$ のとき、(1) 右辺 $= 1/6$ である. 非負整数 $v_a(f), v_i(f), v_{\omega}(f), v_{\infty}(f)$ で式 (1) を満たすものは存在しないから、重さ 2 の保型形式は 0 しかない.

保型形式の構造：定理 2' の証明

$$v_{\infty}(f) + \frac{1}{2}v_i(f) + \frac{1}{3}v_{\omega}(f) + \sum_{a \in \overline{F} - \{i, \omega, -\omega^2, i\infty\}} v_a(f) = \frac{k}{12} \quad (1)$$

④ $k = 4$ のとき, (1) 右辺 = $1/3$. f を重さ 4 の保型形式とすると, (1) より

$$v_{\omega}(f) = 1, \quad v_a(f) = v_i(f) = v_{\infty}(f) = 0 \quad \left(a \in \overline{F} - \{i, \omega, -\omega^2, i\infty\} \right)$$

となるから, 零点の位置は確定する ($\tau = \omega = e^{2\pi i/3}$ に 1 位の零点).
したがって, 重さ 4 の保型形式は定数倍を除いてひとつしか存在しない.

$\therefore f_1$ を別の重さ 4 の保型形式とすると,
 f_1/f は重さ 0 の保型形式となるので, $f_1/f \equiv \text{const.}$

$E_4(\tau)$ は重さ 4 の保型形式であるから, $f = \text{const.} \times E_4(\tau)$.

$k = 6, 8, 10, 14$ の場合も同様である.

保型形式の構造：定理 2' の証明

$$v_{\infty}(f) + \frac{1}{2}v_i(f) + \frac{1}{3}v_{\omega}(f) + \sum_{a \in \overline{F} - \{i, \omega, -\omega^2, i\infty\}} v_a(f) = \frac{k}{12} \quad (1)$$

- ⑤ f を重さ $k = 12$ の尖点形式とすると, f は $\tau = i\infty$ に零点を持つので $v_{\infty}(f) \geq 1$. そして, (1) で $k = 12$ と置いた式から

$$v_{\infty}(f) = 1, \quad v_a(f) = v_i(f) = v_{\omega}(f) = 0 \quad \left(a \in \overline{F} - \{i, \omega, -\omega^2, i\infty\} \right)$$

が得られるから, f の零点は $\tau = i\infty$ における 1 位の零点だけと確定する. よって, 重さ 12 の尖点形式は定数倍を除いてひとつしか存在しない.

$$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12} q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24} \quad (\text{重さ } 12 \text{ の尖点形式})$$

であるから, $f(\tau) = \text{const.} \times \Delta(\tau)$.

保型形式の構造：定理 2' の証明

$$v_{\infty}(f) + \frac{1}{2}v_i(f) + \frac{1}{3}v_{\omega}(f) + \sum_{a \in \overline{F} - \{i, \omega, -\omega^2, i\infty\}} v_a(f) = \frac{k}{12} \quad (1)$$

- ⑤ (続き) $k \geq 16$ の場合. f を重さ k の尖点形式とすると, $\Delta(\tau)$ は $\mathbb{H}$ の有限部分に零点をもたないから, f/Δ は重さ $k-12$ の保型形式である.

$$\therefore f(\tau) = \Delta(\tau) \times (\text{重さ } k-12 \text{ の保型形式}).$$

$k < 12$ または $k = 14$ の場合, (1) において $v_{\infty}(f) = 1$ とすることはできないから, 重さ k の尖点形式は 0 だけである.

- ⑥ f を重さ k の保型形式とする. $c = f(i\infty)$ とすると, $E_k(i\infty) = 1$ より $f(\tau) - cE_k(\tau)$ は重さ k の尖点形式となる.

$$\therefore f(\tau) = (\text{重さ } k \text{ の尖点形式}) + cE_k(\tau).$$



保型形式の構造

定理 2 から保型形式の形はかなり限定されたものになることがわかる.

- 重さ 0 の保型形式は定数関数だけ,
重さ 2 の保型形式は 0 だけである.
- 重さ 4 の保型形式は $\text{const.} \times E_4(\tau)$ だけ,
重さ 6 の保型形式は $\text{const.} \times E_6(\tau)$ だけである.
- 重さ 8 の保型形式は $\text{const.} \times E_8(\tau)$ だけである.
 $E_4^2(\tau)$ は重さ 8 の保型形式だから, $E_4^2(\tau) = \text{const.} \times E_8(\tau)$.
両辺を $q = e^{2\pi i\tau}$ のベキ級数で表したときの定数項を比較して,
 $\text{const.} = 1$.

$$\therefore E_8(\tau) = E_4^2(\tau).$$

- 同様の考察により,

$$E_{10}(\tau) = E_4(\tau)E_6(\tau), \quad E_{14}(\tau) = E_4^2(\tau)E_6(\tau).$$

そして,

重さ 10 の保型形式は $\text{const.} \times E_{10}(\tau) = \text{const.} \times E_4(\tau)E_6(\tau)$,

重さ 14 の保型形式は $\text{const.} \times E_{14}(\tau) = \text{const.} \times E_4^2(\tau)E_6(\tau)$

に限られる.

- $k = 12$ の場合,

$$\text{重さ } 12 \text{ の保型形式} = \underbrace{\text{const.} \times \Delta(\tau)}_{\text{尖点形式}} + \text{const.} \times E_{12}(\tau).$$

$E_4^3(\tau)$, $E_6^2(\tau)$ は重さ 12 の保型形式であり, 尖点形式でないから,

$$\begin{aligned} E_{12}(\tau) &= \text{const.} \times \Delta(\tau) + \text{const.} \times E_4^3(\tau) \\ &= \text{const.} \times \Delta(\tau) + \text{const.} \times E_6^2(\tau). \end{aligned}$$

そして,

$$\Delta(\tau) = \frac{(2\pi)^{12}}{12^3} (E_4^3(\tau) - E_6^2(\tau)).$$

∴ 重さ 12 の保型形式は $E_4(\tau)$, $E_6(\tau)$ の多項式で表される.

保型形式の構造

- $k = 16$ の場合,

$$\begin{aligned} & \text{重さ } 16 \text{ の保型形式} \\ &= \text{const.} \times \Delta(\tau) \times \underbrace{\text{重さ } 4 \text{ の保型形式}}_{\text{const.} \times E_4(\tau)} + \text{const.} \times E_{16}(\tau). \end{aligned}$$

$E_4^4(\tau)$ (または $E_4(\tau)E_6^2(\tau)$) は重さ 16 の保型形式で、尖点形式でないから,

$$E_{16}(\tau) = \text{const.} \times \Delta(\tau)E_4(\tau) + \text{const.} \times E_4^4(\tau).$$

そして,

$$\Delta(\tau) = \frac{(2\pi)^{12}}{12^3}(E_4^3(\tau) - E_6^2(\tau)).$$

$\therefore$ 重さ 16 の保型形式は $E_4(\tau), E_6(\tau)$ の多項式で表される.

- ...

定理：保型形式の構造

- すべての保型形式は Eisenstein 級数 $E_4(\tau)$, $E_6(\tau)$ の多項式で表される.



$$M_k(\Gamma) = \bigoplus_{4i+6j=k} \mathbb{C} E_4^i(\tau) E_6^j(\tau).$$

とくに, すべての Eisenstein 級数 $E_k(\tau)$ は $E_4(\tau)$, $E_6(\tau)$ の多項式で表される.

- 楕円関数論における考察からも同じ結果を得ていた (動画「楕円関数論 (13)」).
- 保型形式論における考察からも同じ結果を得られるのは興味深い.

楕円関数論では…

すべての楕円関数 $f(u)$ (周期格子 Λ) は, Weierstrass 楕円関数 $\wp(u)$ (周期格子 Λ) を用いて次の形で表される.

$$f(u) = R_1(\wp(u)) + \wp'(u)R_2(\wp(u)),$$
$$R_1(\cdot), R_2(\cdot) : \text{有理関数}.$$

証明は「補遺」に記す.

- Weierstrass の $\wp$ 関数 $\wp(u)$ は楕円関数の基本単位である.
- Eisenstein 級数 $E_4(\tau), E_6(\tau)$ は保型形式の基本単位である.

- 楕円モジュラー関数 $J(\tau)$ は次の全単射を与える.

$$\Gamma \backslash \overline{\mathbb{H}} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}).$$

- 重さ k の保型形式: $\mathbb{H}$ 上の正則関数 $f(\tau)$ で次を満たすもの.

$$f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k f(\tau) \quad \left(\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \right),$$

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n q^n \quad (q = e^{2\pi i \tau})$$

(Fourier 級数の $n < 0$ の項=0, $f(i\infty)$ は有限値).

- 重さ k の尖点形式: 重さ k の保型形式 f で $f(i\infty) = 0$ なるもの.
- すべての保型形式は Eisenstein 級数 $E_4(\tau), E_6(\tau)$ の多項式で表される.

定理

すべての楕円関数 $f(u)$ (周期格子 Λ) は, Weierstrass 楕円関数 $\wp(u)$ (周期格子 Λ) を用いて次の形で表される.

$$f(u) = R_1(\wp(u)) + \wp'(u)R_2(\wp(u)),$$

$$R_1(\cdot), R_2(\cdot) : \text{有理関数}.$$

(証明) 3 段階に分ける. $f(u)$ を楕円関数 (周期格子 Λ) とする.

Step 1/3 $f(u)$ が偶関数の場合.

$\pm\alpha_1, \dots, \pm\alpha_r : u \equiv 0 \pmod{\Lambda}$ 以外の $f(u)$ の零点または極.

整数 $m_1, \dots, m_r$ を次のように定める.

- $\pm\alpha_j$ は $f(u)$ の零点 & $\alpha_j \notin (1/2)\Lambda \Rightarrow m_j =$ 零点 α_j の多重度.
- $\pm\alpha_j$ は $f(u)$ の零点 & $\alpha_j \in (1/2)\Lambda \Rightarrow 2m_j =$ 零点 α_j の多重度.
- $\pm\alpha_j$ は $f(u)$ の極 & $\alpha_j \notin (1/2)\Lambda \Rightarrow -m_j =$ 極 α_j の多重度.
- $\pm\alpha_j$ は $f(u)$ の極 & $\alpha_j \in (1/2)\Lambda \Rightarrow -2m_j =$ 極 α_j の多重度.

$$F(u) := \prod_{j=1}^r (\wp(u) - \wp(\alpha_j))^{m_j}.$$

$F(u)$ は楕円関数（周期格子 Λ ）であり，

$$\sum (\text{零点の個数}) = \sum (\text{極の個数})$$

を考慮すると，（ $u \equiv 0$ に零点または極がある場合は） $u \equiv 0$ も含めて零点・極は $f(u)$ と一致する．よって，

$$f(u) = \text{const.} \times F(u) = \wp(u) \text{ の有理関数.}$$

Step 2/3 $f(u)$ が奇関数の場合．

$f(u)/\wp'(u)$ は偶関数かつ楕円関数であるから，Step 1/3 より

$$\frac{f(u)}{\wp'(u)} = \wp(u) \text{ の有理関数.}$$

Step 3/3 一般の場合.

$$g(u) := \frac{1}{2}(f(u) + f(-u)), \quad h(u) := \frac{1}{2}(f(u) - f(-u)).$$

$f(u), g(u)$ は楕円関数, $f(u)$ は偶関数, $g(u)$ は奇関数であるから,

$$g(u) = R_1(\wp(u)), \quad h(u) = \wp'(u)R_2(\wp(u)) \quad (R_1, R_2 : \text{有理関数}),$$

$$\therefore f(u) = g(u) + h(u) = R_1(\wp(u)) + \wp'(u)R_2(\wp(u)).$$

