楕円関数論しょーとこーす (1)
Jacobi の楕円関数

緒方　秀教

電気通信大学　大学院情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻

2021 年 3 月 18 日（木）

この動画の目的

動画シリーズ「楕円関数論」の要約.

この動画では…

Jacobi 楕円関数論を一本の動画に要約

本動画の内容

Jacobi 楕円関数論

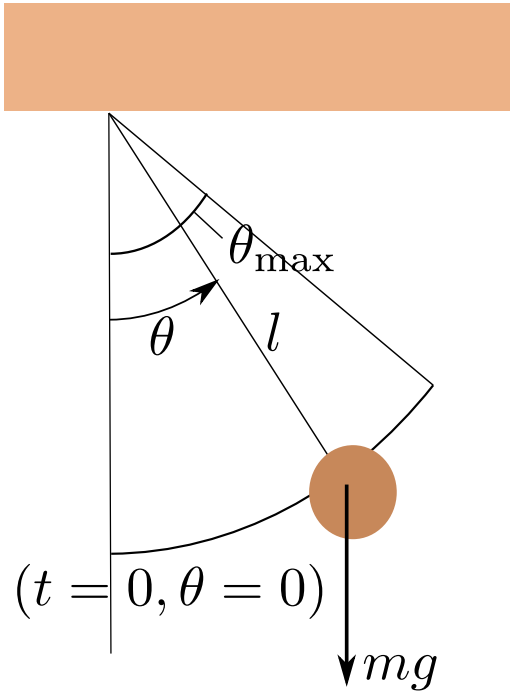
1. 単振り子の振動–Jacobi 楕円関数の定義（実関数として）.
2. 加法定理.
3. 複素関数としての Jacobi 楕円関数. 二重周期性.

∗ 「2. 加法定理」,「3. 複素関数としての Jacobi 楕円関数. 二重周期性」の諸定理の証明（全部「補遺」に記した）は，以前よりかなり書き直しています.

(1/3) 単振り子の振動–Jacobi 楕円関数の定義

単振り子

質量 m, 糸の長さ l, 振れの角度 θ
（$\theta_{\max}$: θ の最大値，$t = 0$ で $\theta = 0$）



運動方程式

$$ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -mg\sin\theta,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\sin\theta = 0 \quad \left(\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}\right).$$

両辺に $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ を掛けて積分する：

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \omega_0^2\cos\theta = -\omega_0^2\cos\theta_{\max} \quad \text{エネルギー保存則,}$$

$$\frac{1}{4\omega_0^2}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \sin^2\frac{\theta_{\max}}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}.$$

(1/3) 単振り子の振動–Jacobi 楕円関数の定義

$$\frac{1}{4\omega_0^2}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = k^2 - \sin^2\frac{\theta}{2}, \quad k = \sin\frac{\theta_{\max}}{2} \quad (\,0 < k < 1\,).$$

$\sin\dfrac{\theta}{2} = k\sin\varphi$ とおくと,

$$\frac{1}{\omega_0^2}\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2 = 1 - k^2\sin^2\varphi,$$

$$\int_0^{\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \omega_0 t$$

$x = \sin\varphi$ とおくと,

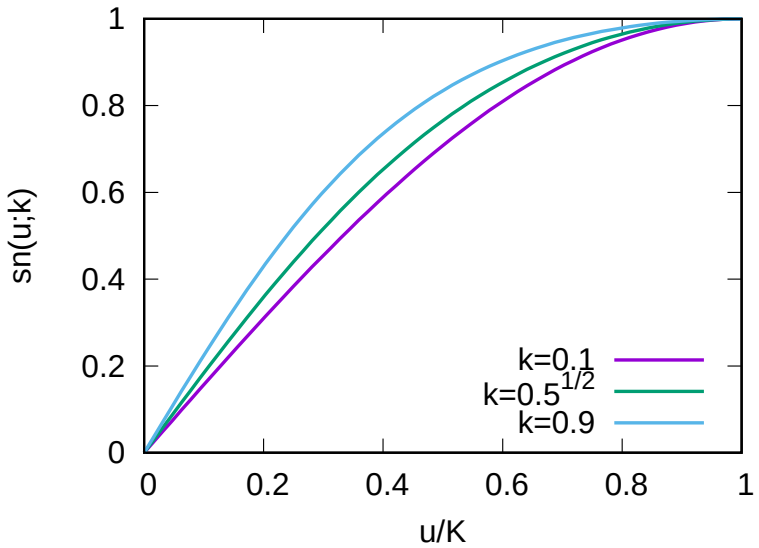
$$\int_0^{x}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \omega_0 t.$$

(1/3) 単振り子の振動–Jacobi 楕円関数：sn 関数

Jacobi の楕円関数 sn u

$$x = \mathrm{sn}\, u = \mathrm{sn}(u; k) \quad \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \quad u = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$k\ (\,0 < k < 1\,)$　母数.



$$K = K(k) := \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

第 **1** 種完全楕円積分.

$\mathrm{sn}\, u$ は $0 \le u \le K$ で単調増加，$\mathrm{sn}\, 0 = 0$, $\mathrm{sn}\, K = 1$.

(1/3) 単振り子の振動：単振り子の運動方程式の解

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \omega_0 t \quad \text{より} \quad x = \mathrm{sn}(\omega_0 t; k).$$

$x = \sin\varphi$, $\sin(\theta/2) = k\sin\varphi$ であったから,

単振り子の運動方程式の解

$$\theta(t) = 2\arcsin\left[k\,\mathrm{sn}(\omega_0 t; k)\right] \quad \left(k = \sin\frac{\theta_{\max}}{2},\ \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \right).$$

(1/3) 単振り子の振動：単振り子の運動方程式の解

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \omega_0 t \quad \text{より} \quad x = \mathrm{sn}(\omega_0 t; k).$$

$x = \sin\varphi$, $\sin(\theta/2) = k\sin\varphi$ であったから,

単振り子の運動方程式の解

$$\theta(t) = 2\arcsin\left[k\,\mathrm{sn}(\omega_0 t; k)\right] \quad \left(k = \sin\frac{\theta_{\max}}{2},\ \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}\right).$$

とくに振れの角が小さい ($\theta_{\max} \approx 0$) 場合,

$$\omega_0 t \approx \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x, \quad x = \sin\varphi \approx \varphi \quad \text{より} \quad \varphi \approx \sin\omega_0 t,$$

$$\frac{\theta}{2} \approx \sin\frac{\theta}{2} = k\sin\varphi \approx k\varphi, \quad k = \sin\frac{\theta_{\max}}{2} \approx \frac{\theta_{\max}}{2}.$$

$$\therefore \quad \theta(t) \approx \theta_{\max}\sin\omega_0 t \quad \text{単振動.}$$

(1/3)Jacobi 楕円関数の定義：極限 $k \to 0, 1$

なぜ「逆関数」を考えるのか？

$$x = \mathrm{sn}(u; k) \quad \Leftrightarrow \quad u = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

(1/3)Jacobi 楕円関数の定義：極限 $k \to 0, 1$

なぜ「逆関数」を考えるのか？

$$x = \mathrm{sn}(u; k) \quad \Leftrightarrow \quad u = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

- 極限 $k \to 0$.

$$u = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x, \quad \therefore \quad \mathrm{sn}(u; 0) = \sin u.$$

- 極限 $k \to 1$.

$$u = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad \therefore \quad \mathrm{sn}(u; 1) = \tanh u.$$

(1/3)Jacobi 楕円関数の定義：極限 $k \to 0, 1$

なぜ「逆関数」を考えるのか？

$$x = \mathrm{sn}(u; k) \quad \Leftrightarrow \quad u = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

- 極限 $k \to 0$.

$$u = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x, \quad \therefore \quad \mathrm{sn}(u; 0) = \sin u.$$

- 極限 $k \to 1$.

$$u = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad \therefore \quad \mathrm{sn}(u; 1) = \tanh u.$$

＊ 「楕円関数」の名前の由来

- 第 1 種楕円積分 $u = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ の逆関数である.
- 楕円の周長：第 2 種楕円積分で表される.

(1/3)Jacobi 楕円関数の定義：cn, dn 関数

cn, dn 関数 ($0 \leq u \leq K$)

$$\operatorname{cn} u = \operatorname{cn}(u; k) := \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 u},$$

$$\operatorname{dn} u = \operatorname{dn}(u; k) := \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u}.$$

(1/3)Jacobi 楕円関数の定義：cn, dn 関数

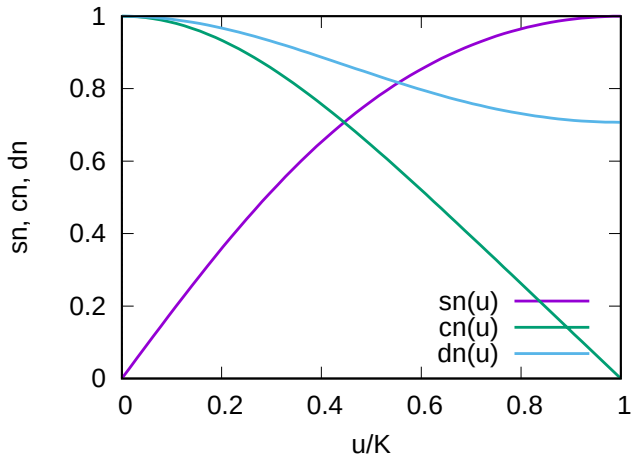
cn, dn 関数 $(0 \le u \le K)$

$$\mathrm{cn}\, u = \mathrm{cn}(u;k) := \sqrt{1 - \mathrm{sn}^2\, u},$$
$$\mathrm{dn}\, u = \mathrm{dn}(u;k) := \sqrt{1 - k^2\, \mathrm{sn}^2\, u}.$$

$$\mathrm{cn}(0;k) = \mathrm{dn}(0;k) = 1,$$
$$\mathrm{cn}(K;k) = 0, \quad \mathrm{dn}(K;k) = k'$$
$$(\ k' = \sqrt{1-k^2} \quad \text{補母数}\ ).$$

極限：$k \to 0, 1$.

$$\mathrm{sn}(u;0) = \sin u, \quad \mathrm{sn}(u;1) = \tanh u$$
$$\Downarrow$$
$$\mathrm{cn}(u;0) = \cos u, \quad \mathrm{cn}(u;1) = \mathrm{sech}\, u.$$
$$\mathrm{dn}(u;0) = 1, \quad \mathrm{dn}(u;1) = \mathrm{sech}\, u.$$



$\mathrm{sn}\, u, \mathrm{cn}\, u, \mathrm{dn}\, u$ $(\ k = \sqrt{0.5}\ )$.

(1/3)Jacobi 楕円関数の定義：振幅関数 am

$$x = \mathrm{sn}\, u = \mathrm{sn}(u; k) \quad \Longleftrightarrow \quad u = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

変数変換 $x = \sin\psi$ を行う.

振幅関数 am

$$\psi = \mathrm{am}\, u = \mathrm{am}(u; k) \quad \overset{\mathrm{def.}}{\Longleftrightarrow} \quad u = \int_0^\psi \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}.$$

(1/3)Jacobi 楕円関数の定義：振幅関数 am

$$x = \mathrm{sn}\, u = \mathrm{sn}(u; k) \quad \Longleftrightarrow \quad u = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

変数変換 $x = \sin\psi$ を行う.

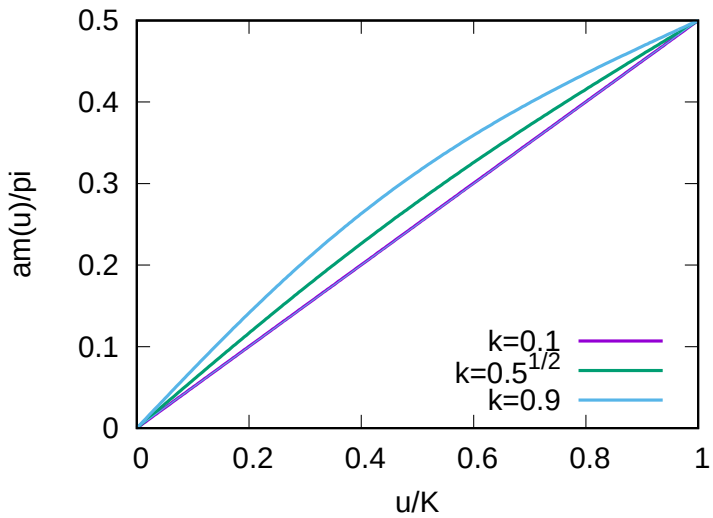
振幅関数 am

$$\psi = \mathrm{am}\, u = \mathrm{am}(u; k) \quad \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \quad u = \int_0^\psi \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}.$$

$$\mathrm{sn}\, u = \sin\psi = \sin(\mathrm{am}\, u),$$
$$\mathrm{cn}\, u = \cos\psi = \cos(\mathrm{am}\, u).$$

縦軸： $\mathrm{am}\, u/\pi$
横軸： u/K

$$k = \sqrt{0.5}.$$



(1/3)Jacobi 楕円関数の定義：$u \leq 0$ への拡張

$\mathrm{sn}, \mathrm{cn}, \mathrm{dn}$ の定義域を $-K \leq u \leq 0$ に拡張する.

$x = \mathrm{sn}\, u$ とすると,

$$-u = \int_0^{-x} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{sn}(-u) = -\,\mathrm{sn}\, u \quad \text{奇関数.}$$

(1/3)Jacobi 楕円関数の定義：$u \leq 0$ への拡張

$\mathrm{sn}, \mathrm{cn}, \mathrm{dn}$ の定義域を $-K \leq u \leq 0$ に拡張する.

$x = \mathrm{sn}\, u$ とすると,

$$-u = \int_0^{-x} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{sn}(-u) = -\,\mathrm{sn}\, u \quad \text{奇関数.}$$

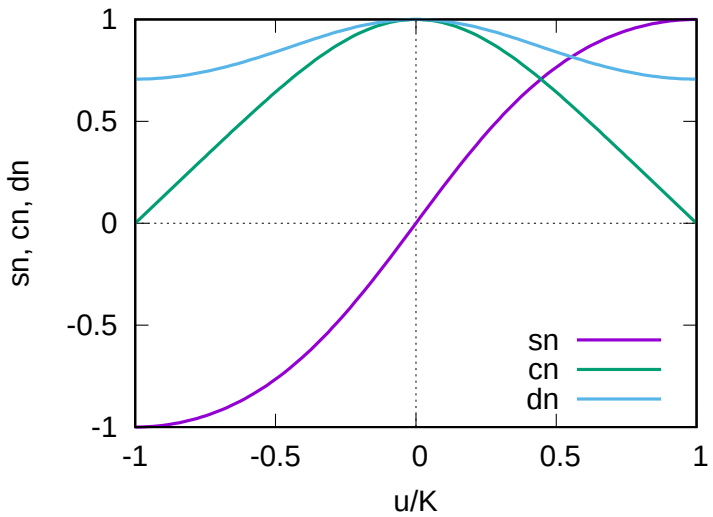
$$\mathrm{cn}\, u = \sqrt{1-\mathrm{sn}^2\, u},$$

$$\mathrm{dn}\, u = \sqrt{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\, u}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{cn}(-u) = \mathrm{cn}\, u$$

$$\mathrm{dn}(-u) = \mathrm{dn}\, u \quad \text{偶関数.}$$



(1/3)Jacobi 楕円関数の定義：$-\infty < u < +\infty$ への拡張

sn, cn, dn の定義域を全実数 $(-\infty < u < +\infty)$ に拡張する．
そこで，sn, cn, dn が周期関数である ことをこれから示す．

(1/3)Jacobi 楕円関数の定義：$-\infty < u < +\infty$ への拡張

sn, cn, dn の定義域を全実数 $(-\infty < u < +\infty)$ に拡張する.
そこで，sn, cn, dn が周期関数である ことをこれから示す.

$\psi = \mathrm{am}(u; k)$ とおく ($\mathrm{sn}\, u = \sin\psi$, $\mathrm{cn}\, u = \cos\psi$).

$$
\begin{aligned}
u + 2K &= \int_0^{\psi} \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}} \\
&= \left(\int_0^{\psi} + \int_{\psi}^{\psi+\pi} \right) \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}} = \int_0^{\psi+\pi} \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}},
\end{aligned}
$$

(1/3)Jacobi 楕円関数の定義：$-\infty < u < +\infty$ への拡張

sn, cn, dn の定義域を全実数 $(-\infty < u < +\infty)$ に拡張する．
そこで，sn, cn, dn が周期関数である ことをこれから示す．

$\psi = \mathrm{am}(u; k)$ とおく ($\mathrm{sn}\, u = \sin\psi$, $\mathrm{cn}\, u = \cos\psi$).

$$
\begin{aligned}
u + 2K &= \int_0^{\psi} \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}} \\
&= \left(\int_0^{\psi} + \int_{\psi}^{\psi+\pi} \right) \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}} = \int_0^{\psi+\pi} \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}},
\end{aligned}
$$

振幅関数 am の定義から，

$$
\begin{aligned}
\psi + \pi &= \mathrm{am}\, u + \pi = \mathrm{am}(u + 2K), \\
\mathrm{sn}(u + 2K) &= \sin(\psi + \pi) = -\sin\psi = -\mathrm{sn}\, u, \\
\mathrm{cn}(u + 2K) &= \cos(\psi + \pi) = -\cos\psi = -\mathrm{cn}\, u, \\
\mathrm{dn}(u + 2K) &= \sqrt{1 - k^2\, \mathrm{sn}^2(u + 2K)} = \mathrm{dn}\, u.
\end{aligned}
$$

(1/3)Jacobi 楕円関数の定義：$-\infty < u < +\infty$ への拡張

$\mathrm{sn}, \mathrm{cn}, \mathrm{dn}$ の定義域を全実数 $(-\infty < u < +\infty)$ に拡張する．
そこで，$\mathrm{sn}, \mathrm{cn}, \mathrm{dn}$ が周期関数である ことをこれから示す．

$\psi = \mathrm{am}(u; k)$ とおく ($\mathrm{sn}\, u = \sin\psi$, $\mathrm{cn}\, u = \cos\psi$).

$$
\begin{aligned}
u + 2K &= \int_0^{\psi} \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}} \\
&= \left(\int_0^{\psi} + \int_{\psi}^{\psi+\pi} \right) \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}} = \int_0^{\psi+\pi} \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}},
\end{aligned}
$$

振幅関数 am の定義から，

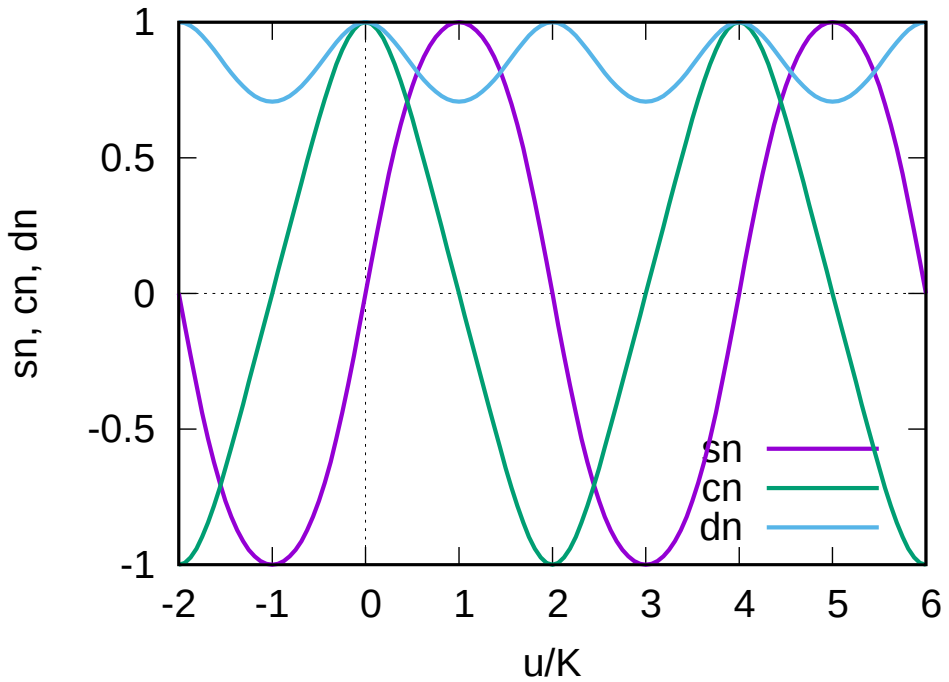
$$
\begin{aligned}
\psi + \pi &= \mathrm{am}\, u + \pi = \mathrm{am}(u + 2K), \\
\mathrm{sn}(u + 2K) &= \sin(\psi + \pi) = -\sin\psi = -\mathrm{sn}\, u, \\
\mathrm{cn}(u + 2K) &= \cos(\psi + \pi) = -\cos\psi = -\mathrm{cn}\, u, \\
\mathrm{dn}(u + 2K) &= \sqrt{1 - k^2\, \mathrm{sn}^2(u + 2K)} = \mathrm{dn}\, u.
\end{aligned}
$$

$$
\mathrm{sn}(u + 2K) = -\mathrm{sn}\, u, \quad \mathrm{cn}(u + 2K) = -\mathrm{cn}\, u, \quad \mathrm{dn}(u + 2K) = \mathrm{dn}\, u.
$$

(1/3)Jacobi 楕円関数の定義：$-\infty < u < +\infty$ への拡張

$$\mathrm{sn}(u+2K) = -\,\mathrm{sn}\,u, \quad \mathrm{cn}(u+2K) = -\,\mathrm{cn}\,u, \quad \mathrm{dn}(u+2K) = \mathrm{dn}\,u,$$
$$\mathrm{sn}(u+4K) = \mathrm{sn}\,u, \quad \mathrm{cn}(u+4K) = \mathrm{cn}\,u.$$

$\mathrm{sn}\,u, \mathrm{cn}\,u$ は周期 $4K$ の，$\mathrm{dn}\,u$ は周期 $2K$ の周期関数である．



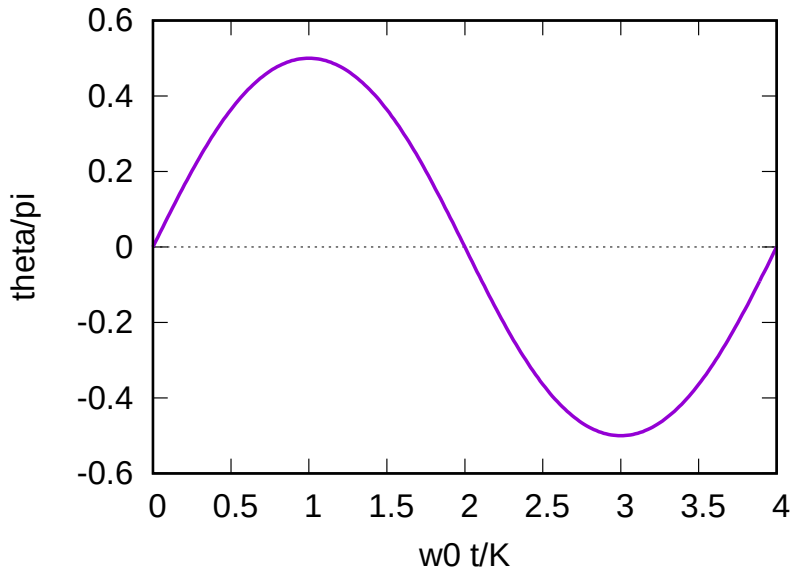
$\mathrm{sn}, \mathrm{cn}, \mathrm{dn}$ ($k = \sqrt{0.5}$) のグラフ．

- $\mathrm{sn}\,u$ の零点：
  $2nK \quad (\, n \in \mathbb{Z}\,)$.
- $\mathrm{cn}\,u$ の零点：
  $(2n+1)K \quad (\, n \in \mathbb{Z}\,)$.
- $\mathrm{dn}\,u$ は実関数としては
  零点を持たない．

(1/3)Jacobi 楕円関数の定義：単振り子運動の解

単振り子の運動方程式の解

$$\theta(t) = 2\arcsin\left[k\,\mathrm{sn}(\omega_0 t; k)\right] \qquad \left(k = \sin\frac{\theta_{\max}}{2},\ \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \right).$$



解 $\theta(t)$ のグラフ ($\theta_{\max} = \pi/2$).

縦軸： $\theta(t)/\pi$

横軸： $\omega_0 t/K$

(1/3)Jacobi 楕円関数の定義：単振り子の周期

単振り子の周期 T を求める.

$$\theta(t) = 2\arcsin\left[k\,\mathrm{sn}(\omega_0 t; k)\right] \quad \left(k = \sin\frac{\theta_{\max}}{2},\ \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \right),$$

$\mathrm{sn}(u; k)$ の周期は $4K$ であるから,

単振り子の周期

$$T = \frac{4K}{\omega_0} = 4K\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad K = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}} \quad \left(\begin{array}{c} \text{第一種} \\ \text{完全楕円積分} \end{array} \right).$$

(1/3)Jacobi 楕円関数の定義：単振り子の周期

単振り子の周期 T を求める.

$$\theta(t) = 2\arcsin\left[k\,\mathrm{sn}(\omega_0 t; k)\right] \quad \left(k = \sin\frac{\theta_{\max}}{2},\ \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \right),$$

$\mathrm{sn}(u; k)$ の周期は $4K$ であるから,

単振り子の周期

$$T = \frac{4K}{\omega_0} = 4K\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad K = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}} \quad \left(\begin{array}{c} \text{第一種} \\ \text{完全楕円積分} \end{array} \right).$$

振れの角が小さい場合，$k \approx 0$，$K \approx \pi/2$ であるから,

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

(1/3)Jacobi 楕円関数の定義：微分方程式

sn, cn, dn の満たす微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\,\mathrm{sn}\,u = \mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\,\mathrm{cn}\,u = -\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\,\mathrm{dn}\,u = -\,k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u.$$

(1/3)Jacobi 楕円関数の定義：微分方程式

sn, cn, dn の満たす微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\,\mathrm{sn}\,u = \mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\,\mathrm{cn}\,u = -\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\,\mathrm{dn}\,u = -\,k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u.$$

（証明）$x = \mathrm{sn}\,u$ とおく.

$$u = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} &= \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} \\ &= \sqrt{1-\mathrm{sn}^2\,u}\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,u} \\ &= \mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u, \\ \therefore \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\,\mathrm{sn}\,u &= \mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u.\end{aligned}$$

(1/3)Jacobi 楕円関数の定義：微分方程式

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\,\mathrm{cn}\,u &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\sqrt{1-\mathrm{sn}^2\,u} = -\frac{\mathrm{sn}\,u(\mathrm{sn}\,u)'}{\sqrt{1-\mathrm{sn}^2\,u}} \\ &= -\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{cn}\,u} = -\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u, \\ \therefore \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\,\mathrm{cn}\,u &= -\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\,\mathrm{dn}\,u &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,u} = -\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,u(\mathrm{sn}\,u)'}{\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,u}} \\ &= -\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{dn}\,u} = -k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u, \\ \therefore \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\,\mathrm{dn}\,u &= -k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u.\end{aligned}$$

■

(1/3)Jacobi 楕円関数の定義：$\mathrm{cn}\, u := \sqrt{1 - \mathrm{sn}^2 u}$ の扱い

$\mathrm{cn}\, u := \sqrt{1 - \mathrm{sn}^2 u}$ の扱いについて．

$\sqrt{\cdot}$ は（複素関数論的には）二価関数ではないか？

(1/3)Jacobi 楕円関数の定義：$\mathrm{cn}\,u := \sqrt{1-\mathrm{sn}^2\,u}$ の扱い

$\mathrm{cn}\,u := \sqrt{1-\mathrm{sn}^2\,u}$ の扱いについて．

$\sqrt{\cdot}$ は（複素関数論的には）二価関数ではないか？

$\varphi(u) = 1-\mathrm{sn}^2\,u$ の $u=K$ における Taylor 級数展開を求めてみると，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} \quad (\,x = \mathrm{sn}\,u\,)$$

を用いて，

$$\varphi(K) = 0, \quad \varphi'(K) = -\,2\,\mathrm{sn}\,u\sqrt{(1-\mathrm{sn}^2\,u)(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,u)}\Big|_{u=K} = 0,$$

$$\varphi''(K) = \,2\,\mathrm{sn}^2\,u(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,u)\Big|_{u=K} = 2k'^2, \quad \ldots$$

$$\varphi(u) = 1-\mathrm{sn}^2\,u = k'^2(u-K)^2 + c_2(u-K)^4 + \cdots \quad (\,c_2,\ldots : \text{const.}\,),$$

$$\sqrt{1-\mathrm{sn}^2\,u} = \sqrt{k'^2(u-K)^2 + c_2(u-K)^4 + \cdots}$$

$$= \pm\,k'(u-K)\sqrt{1+\frac{c_2}{k'^2}(u-K)^2 + \cdots}.$$

(1/3)Jacobi 楕円関数の定義：$\mathrm{cn}\,u := \sqrt{1-\mathrm{sn}^2\,u}$ の扱い

$\mathrm{cn}\,u := \sqrt{1-\mathrm{sn}^2\,u}$ の扱いについて．

$\sqrt{\cdot}$ は（複素関数論的には）二価関数ではないか？

$\varphi(u) = 1-\mathrm{sn}^2\,u$ の $u=K$ における Taylor 級数展開を求めてみると，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} \quad (\,x = \mathrm{sn}\,u\,)$$

を用いて，

$$\varphi(K) = 0, \quad \varphi'(K) = -\,2\,\mathrm{sn}\,u\sqrt{(1-\mathrm{sn}^2\,u)(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,u)}\Big|_{u=K} = 0,$$

$$\varphi''(K) = \,2\,\mathrm{sn}^2\,u(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,u)\Big|_{u=K} = 2k'^2, \quad \ldots$$

$$\varphi(u) = 1-\mathrm{sn}^2\,u = k'^2(u-K)^2 + c_2(u-K)^4 + \cdots \quad (\,c_2,\ldots : \text{const.}\,),$$

$$\sqrt{1-\mathrm{sn}^2\,u} = \sqrt{k'^2(u-K)^2 + c_2(u-K)^4 + \cdots}$$

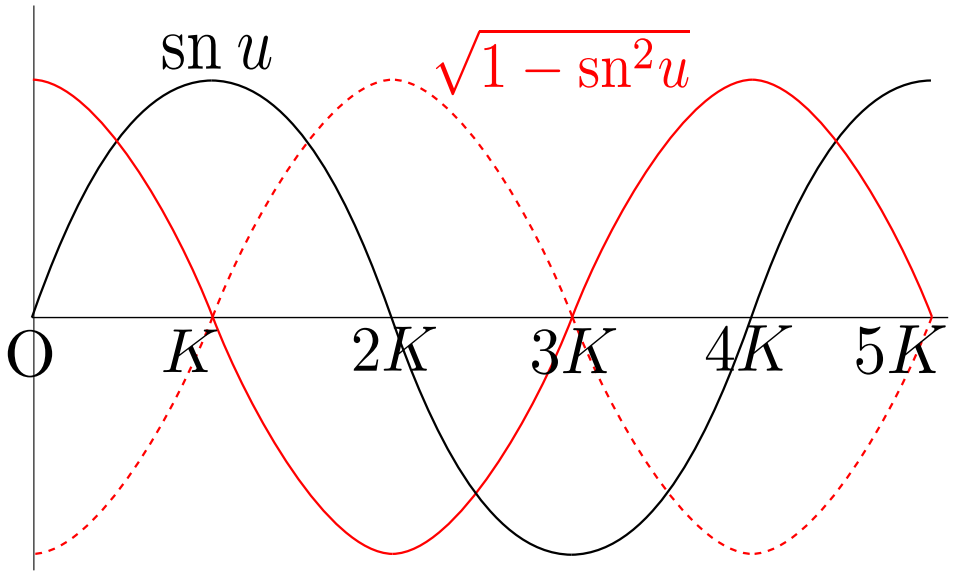
$$= \pm\,k'(u-K)\sqrt{1+\frac{c_2}{k'^2}(u-K)^2 + \cdots}.$$

$\sqrt{1-\mathrm{sn}^2\,u}$ は 2 個の一価関数を表している．

$u = -K, \pm 3K, \pm 5K, \ldots$ でも同様．

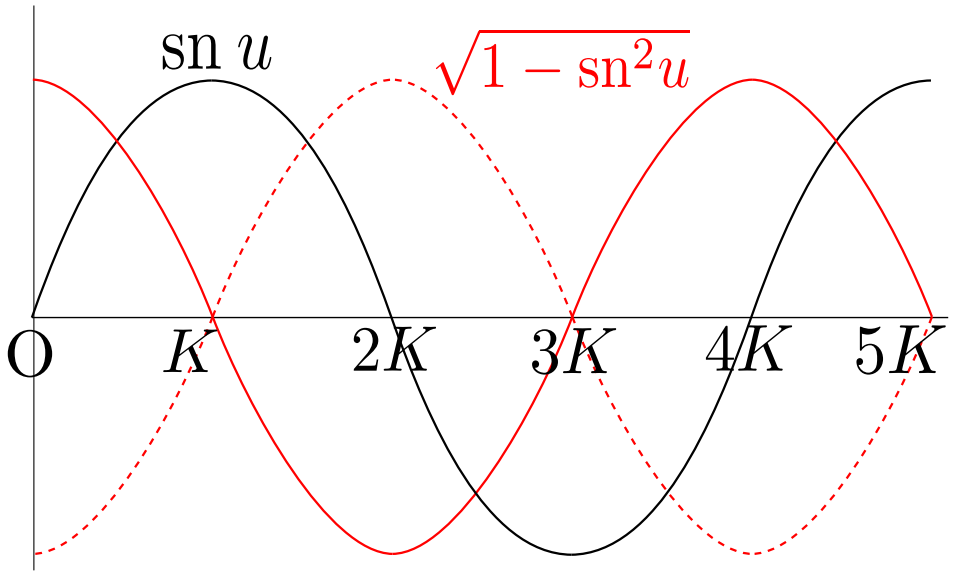
(1/3)Jacobi 楕円関数の定義：$\mathrm{cn}\,u := \sqrt{1-\mathrm{sn}^2\,u}$ の扱い

$\sqrt{1-\mathrm{sn}^2\,u}$ は 2 個の一価関数.



(1/3)Jacobi 楕円関数の定義：$\mathrm{cn}\,u := \sqrt{1-\mathrm{sn}^2\,u}$ の扱い

$\sqrt{1-\mathrm{sn}^2\,u}$ は 2 個の一価関数.

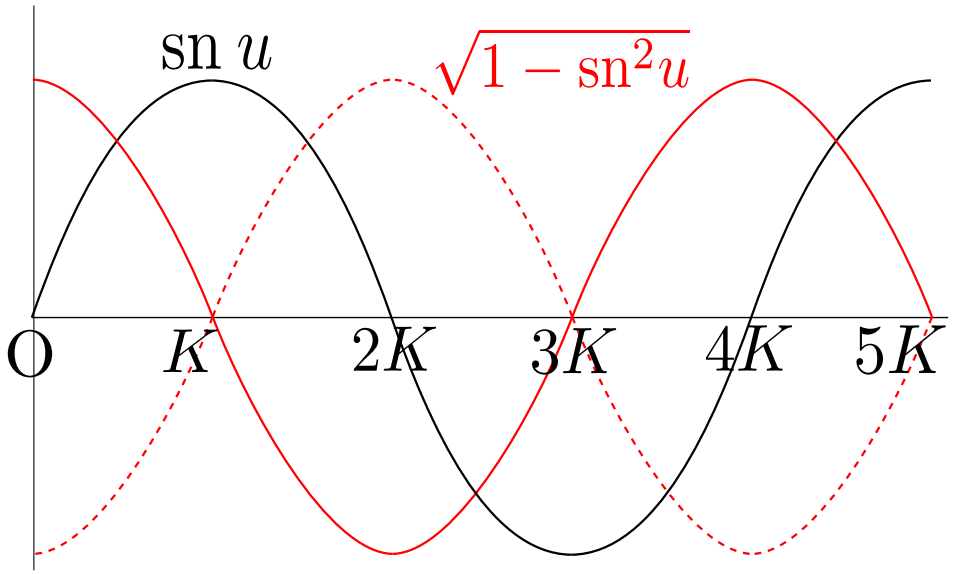


$\sqrt{1-\mathrm{sn}^2\,u}(=:\mathrm{cn}\,u)$ は「2 個の一価関数」のうち，$u=0$ で 1 の値をとるものと約束する.

$\mathrm{dn}\,u := \sqrt{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,u}$ も同様に定義する.

(1/3)Jacobi 楕円関数の定義：$\mathrm{cn}\,u := \sqrt{1-\mathrm{sn}^2\,u}$ の扱い

$\sqrt{1-\mathrm{sn}^2\,u}$ は 2 個の一価関数.



$\sqrt{1-\mathrm{sn}^2\,u}(=:\mathrm{cn}\,u)$ は「2 個の一価関数」のうち，$u=0$ で 1 の値をとるものと約束する.

$\mathrm{dn}\,u := \sqrt{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,u}$ も同様に定義する.

$*$ あるいは振幅関数 $\psi = \mathrm{am}\,u$ を使って議論する.

$$\mathrm{sn}\,u = \sin\psi, \quad \mathrm{cn}\,u = \cos\psi.$$

(2/3) 加法定理

Jacobi 楕円関数の加法定理

$$\mathrm{sn}(u+v;k) = ?, \quad \mathrm{cn}(u+v;k) = ?, \quad \mathrm{dn}(u+v;k) = ?.$$

Jacobi 楕円関数の加法定理

$$\mathrm{sn}(u+v;k)=?,\quad \mathrm{cn}(u+v;k)=?,\quad \mathrm{dn}(u+v;k)=?.$$

$k\to 0,1$ の場合から推測してみる.

Jacobi 楕円関数の $k\to 0,1$ における極限.

$$\begin{aligned}
&(\ k\to 0\ ) \quad \mathrm{sn}(u;0)=\sin u,\ \mathrm{cn}(u;0)=\cos u,\ \mathrm{dn}(u;0)=1,\\
&(\ k\to 1\ ) \quad \mathrm{sn}(u;1)=\tanh u,\ \mathrm{cn}(u;1)=\mathrm{dn}(u;1)=\mathrm{sech}\, u.
\end{aligned}$$

極限 $k\to 0,1$ における加法定理.

$$\begin{aligned}
\sin(u+v) &= \sin u\cos v+\cos u\sin v,\\
\tanh(u+v) &= \frac{\tanh u\,\mathrm{sech}^2 v+\tanh v\,\mathrm{sech}^2 u}{1-\tanh^2 u\tanh^2 v}.
\end{aligned}$$

これらを sn, cn, dn で書き直す.

(2/3) 加法定理

$$\mathrm{sn}(u+v;0) = \mathrm{sn}(u;0)\,\mathrm{cn}(v;0)\,\mathrm{dn}(v;0) + \mathrm{sn}(v;0)\,\mathrm{cn}(u;0)\,\mathrm{dn}(u;0),$$

$$\mathrm{sn}(u+v;1) = \frac{\mathrm{sn}(u;1)\,\mathrm{cn}(v;1)\,\mathrm{dn}(v;1) + \mathrm{sn}(v;1)\,\mathrm{cn}(u;1)\,\mathrm{dn}(u;1)}{1 - \mathrm{sn}^2(u;1)\,\mathrm{sn}^2(v;1)}.$$

(2/3) 加法定理

$$\mathrm{sn}(u+v;0) = \mathrm{sn}(u;0)\,\mathrm{cn}(v;0)\,\mathrm{dn}(v;0) + \mathrm{sn}(v;0)\,\mathrm{cn}(u;0)\,\mathrm{dn}(u;0),$$

$$\mathrm{sn}(u+v;1) = \frac{\mathrm{sn}(u;1)\,\mathrm{cn}(v;1)\,\mathrm{dn}(v;1) + \mathrm{sn}(v;1)\,\mathrm{cn}(u;1)\,\mathrm{dn}(u;1)}{1 - \mathrm{sn}^2(u;1)\,\mathrm{sn}^2(v;1)}.$$

これらを $0 < k < 1$ で補間する式として，次の加法定理が予想される．

$$\mathrm{sn}(u+v;k) = \frac{\mathrm{sn}(u;k)\,\mathrm{cn}(v;k)\,\mathrm{dn}(v;k) + \mathrm{sn}(v;k)\,\mathrm{cn}(u;k)\,\mathrm{dn}(u;k)}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2(u;k)\,\mathrm{sn}^2(v;k)}.$$

(2/3) 加法定理

$$\mathrm{sn}(u+v;0) = \mathrm{sn}(u;0)\,\mathrm{cn}(v;0)\,\mathrm{dn}(v;0) + \mathrm{sn}(v;0)\,\mathrm{cn}(u;0)\,\mathrm{dn}(u;0),$$
$$\mathrm{sn}(u+v;1) = \frac{\mathrm{sn}(u;1)\,\mathrm{cn}(v;1)\,\mathrm{dn}(v;1) + \mathrm{sn}(v;1)\,\mathrm{cn}(u;1)\,\mathrm{dn}(u;1)}{1-\mathrm{sn}^2(u;1)\,\mathrm{sn}^2(v;1)}.$$

これらを $0<k<1$ で補間する式として，次の加法定理が予想される．

$$\mathrm{sn}(u+v;k) = \frac{\mathrm{sn}(u;k)\,\mathrm{cn}(v;k)\,\mathrm{dn}(v;k) + \mathrm{sn}(v;k)\,\mathrm{cn}(u;k)\,\mathrm{dn}(u;k)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(u;k)\,\mathrm{sn}^2(v;k)}.$$

$\mathrm{cn}\,u = \sqrt{1-\mathrm{sn}^2\,u}$, $\mathrm{dn}\,u = \sqrt{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,u}$ より次を得る（「補遺 1」参照）．

$$\mathrm{cn}(u+v;k) = \frac{\mathrm{cn}(u;k)\,\mathrm{cn}(v;k) - \mathrm{sn}(u;k)\,\mathrm{dn}(u;k)\,\mathrm{sn}(v;k)\,\mathrm{dn}(v;k)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(u;k)\,\mathrm{sn}^2(v;k)},$$
$$\mathrm{dn}(u+v;k) = \frac{\mathrm{dn}(u;k)\,\mathrm{dn}(v;k) - k^2\,\mathrm{sn}(u;k)\,\mathrm{cn}(u;k)\,\mathrm{sn}(v;k)\,\mathrm{cn}(v;k)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(u;k)\,\mathrm{sn}^2(v;k)}.$$

そして，これらの等式は実際に正しいことが示される．

(2/3) 加法定理

Jacobi 楕円関数の加法定理

$$\mathrm{sn}(u+v) = \frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v + \mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{sn}^2\,v},$$

$$\mathrm{cn}(u+v) = \frac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v - \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,v}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{sn}^2\,v},$$

$$\mathrm{dn}(u+v) = \frac{\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v - k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,v}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{sn}^2\,v}.$$

- 加法定理のちゃんとした証明は，本 PC スライド末尾の「補遺 2」に記します.
- 本 PC スライドは Web にアップロードしておきます．概要欄に URL
  `http://www.uec-ogata-lab.jp/research/`
  を記しますのでそれをクリックしてください.

(3/3) 複素関数としての Jacobi 楕円関数

Jacobi 楕円関数を複素関数に拡張する．

はじめに，純虚数を引数にもつ楕円関数を求める．

(3/3) 複素関数としての Jacobi 楕円関数

Jacobi 楕円関数を複素関数に拡張する.

はじめに，純虚数を引数にもつ楕円関数を求める.

$$x = \mathrm{sn}(\mathrm{i}v; k) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{i}v = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

(3/3) 複素関数としての Jacobi 楕円関数

Jacobi 楕円関数を複素関数に拡張する.
はじめに，純虚数を引数にもつ楕円関数を求める.

$$x = \mathrm{sn}(\mathrm{i}v; k) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{i}v = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

$x = \mathrm{i}y$ とおくと,

$$v = \int_0^y \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(1+y^2)(1+k^2y^2)}}.$$

$y = \tan\psi$ とおくと,

$$v = \int_0^\psi \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}}, \quad k' = \sqrt{1-k^2} \quad (\text{補母数}),$$
$$\therefore \quad \psi = \mathrm{am}(v; k'), \quad \sin\psi = \mathrm{sn}(v; k'), \quad \cos\psi = \mathrm{cn}(v; k').$$

(3/3) 複素関数としての Jacobi 楕円関数

$$y = \tan\psi = \frac{\sin\psi}{\cos\psi} = \frac{\mathrm{sn}(v;k')}{\mathrm{cn}(v;k')}.$$

$x = \mathrm{i}y = \mathrm{sn}(\mathrm{i}v;k)$ であったから，

$$\mathrm{sn}(\mathrm{i}v;k) = \mathrm{i}\frac{\mathrm{sn}(v;k')}{\mathrm{cn}(v;k')}.$$

$\mathrm{cn}\,u = \sqrt{1-\mathrm{sn}^2\,u}$, $\mathrm{dn}\,u = \sqrt{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,u}$ より，

$$\mathrm{cn}(\mathrm{i}v;k) = \frac{1}{\mathrm{cn}(v;k')}, \quad \mathrm{dn}(\mathrm{i}v;k) = \frac{\mathrm{dn}(v;k')}{\mathrm{cn}(v;k')}.$$

(3/3) 複素関数としての Jacobi 楕円関数

$$y = \tan\psi = \frac{\sin\psi}{\cos\psi} = \frac{\mathrm{sn}(v;k')}{\mathrm{cn}(v;k')}.$$

$x = \mathrm{i}y = \mathrm{sn}(\mathrm{i}v;k)$ であったから，

$$\mathrm{sn}(\mathrm{i}v;k) = \mathrm{i}\frac{\mathrm{sn}(v;k')}{\mathrm{cn}(v;k')}.$$

$\mathrm{cn}\,u = \sqrt{1-\mathrm{sn}^2\,u}$, $\mathrm{dn}\,u = \sqrt{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,u}$ より，

$$\mathrm{cn}(\mathrm{i}v;k) = \frac{1}{\mathrm{cn}(v;k')}, \quad \mathrm{dn}(\mathrm{i}v;k) = \frac{\mathrm{dn}(v;k')}{\mathrm{cn}(v;k')}.$$

純虚数を引数にもつ Jacobi 楕円関数

$$\mathrm{sn}(\mathrm{i}v;k) = \mathrm{i}\frac{\mathrm{sn}(v;k')}{\mathrm{cn}(v;k')}, \quad \mathrm{cn}(\mathrm{i}v;k) = \frac{1}{\mathrm{cn}(v;k')}, \quad \mathrm{dn}(\mathrm{i}v;k) = \frac{\mathrm{dn}(v;k')}{\mathrm{cn}(v;k')}.$$

(3/3) 複素関数としての Jacobi 楕円関数

複素変数の Jacobi 楕円関数.
加法定理の式 $\mathrm{sn}(u+v;k)=\cdots$ で形式的に $v \to \mathrm{i}v$ とする.

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{sn}(u+\mathrm{i}v;k)\\
&= \frac{\mathrm{sn}(u;k)\mathrm{cn}(\mathrm{i}v;k)\,\mathrm{dn}(\mathrm{i}v;k)+\mathrm{sn}(\mathrm{i}v;k)\,\mathrm{cn}(u;k)\,\mathrm{dn}(u;k)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(u;k)\mathrm{sn}^2(\mathrm{i}v;k)}\\
&= \frac{\mathrm{sn}(u;k)\dfrac{1}{\mathrm{cn}(v;k')}\dfrac{\mathrm{dn}(v;k')}{\mathrm{cn}(v;k')}+\mathrm{i}\dfrac{\mathrm{sn}(v;k')}{\mathrm{cn}(v;k')}\,\mathrm{cn}(u;k)\,\mathrm{dn}(u;k)}{1+k^2\,\mathrm{sn}^2(u;k)\dfrac{\mathrm{sn}^2(v;k')}{\mathrm{cn}^2(v;k')}}\\
&= \frac{\mathrm{sn}(u;k)\,\mathrm{dn}(v;k')+\mathrm{i}\,\mathrm{cn}(u;k)\,\mathrm{dn}(u;k)\,\mathrm{sn}(v;k')\,\mathrm{cn}(v;k')}{\mathrm{cn}^2(v;k')+k^2\,\mathrm{sn}^2(u;k)\,\mathrm{sn}^2(v;k')}, \qquad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

(3/3) 複素関数としての Jacobi 楕円関数

複素関数としての sn, cn, dn

$$\mathrm{sn}(u+\mathrm{i}v;k) = \frac{\mathrm{sn}(u;k)\,\mathrm{dn}(v;k') + \mathrm{i}\,\mathrm{cn}(u;k)\,\mathrm{dn}(u;k)\,\mathrm{sn}(v;k')\,\mathrm{cn}(v;k')}{\mathrm{cn}^2(v;k') + k^2\,\mathrm{sn}^2(u;k)\,\mathrm{sn}^2(v;k')},$$

$$\mathrm{cn}(u+\mathrm{i}v;k) = \frac{\mathrm{cn}(u;k)\,\mathrm{cn}(v;k') - \mathrm{i}\,\mathrm{sn}(u;k)\,\mathrm{dn}(u;k)\,\mathrm{sn}(v;k')\,\mathrm{dn}(v;k')}{\mathrm{cn}^2(v;k') + k^2\,\mathrm{sn}^2(u;k)\,\mathrm{sn}^2(v;k')},$$

$$\mathrm{dn}(u+\mathrm{i}v;k) = \frac{\mathrm{dn}(u;k)\,\mathrm{cn}(v;k')\,\mathrm{dn}(v;k') - \mathrm{i}k^2\,\mathrm{sn}(u;k)\,\mathrm{cn}(u;k)\,\mathrm{sn}(v;k')}{\mathrm{cn}^2(v;k') + k^2\,\mathrm{sn}^2(u;k)\,\mathrm{sn}^2(v;k')}$$

$$(\ k' = \sqrt{1-k^2}\quad \text{補母数}\ ).$$

(3/3) 複素関数としての Jacobi 楕円関数

複素関数としての sn, cn, dn

$$\mathrm{sn}(u+\mathrm{i}v;k)=\frac{\mathrm{sn}(u;k)\,\mathrm{dn}(v;k')+\mathrm{i}\,\mathrm{cn}(u;k)\,\mathrm{dn}(u;k)\,\mathrm{sn}(v;k')\,\mathrm{cn}(v;k')}{\mathrm{cn}^2(v;k')+k^2\,\mathrm{sn}^2(u;k)\,\mathrm{sn}^2(v;k')},$$

$$\mathrm{cn}(u+\mathrm{i}v;k)=\frac{\mathrm{cn}(u;k)\,\mathrm{cn}(v;k')-\mathrm{i}\,\mathrm{sn}(u;k)\,\mathrm{dn}(u;k)\,\mathrm{sn}(v;k')\,\mathrm{dn}(v;k')}{\mathrm{cn}^2(v;k')+k^2\,\mathrm{sn}^2(u;k)\,\mathrm{sn}^2(v;k')},$$

$$\mathrm{dn}(u+\mathrm{i}v;k)=\frac{\mathrm{dn}(u;k)\,\mathrm{cn}(v;k')\,\mathrm{dn}(v;k')-\mathrm{i}k^2\,\mathrm{sn}(u;k)\,\mathrm{cn}(u;k)\,\mathrm{sn}(v;k')}{\mathrm{cn}^2(v;k')+k^2\,\mathrm{sn}^2(u;k)\,\mathrm{sn}^2(v;k')}$$

$$(\ k'=\sqrt{1-k^2}\quad \text{補母数}\ ).$$

$\mathrm{sn}\,z, \mathrm{cn}\,z, \mathrm{dn}\,z$ ($z=u+\mathrm{i}v$) は 分母 $=0$ となる点以外で
Cauchy-Riemann 関係式を満たすことが示される（「補遺 3」参照）.

$\therefore$ $\mathrm{sn}\,z, \mathrm{cn}\,z, \mathrm{dn}\,z$ は 分母 $=0$ なる点以外で正則関数である.

$$\mathrm{sn}, \mathrm{cn}, \mathrm{dn} \text{ の特異点 (分母 } =0) : u+\mathrm{i}v=2mK+(2n+1)\mathrm{i}K',$$
$$m,n\in\mathbb{Z},\quad K'=K(k').$$

(3/3) 複素関数としての Jacobi 楕円関数

$$\Sigma := \mathbb{C} - \{\, 2mK + (2n+1)\mathrm{i}K' \mid m, n \in \mathbb{Z} \,\},$$

$\mathbb{C}$ から $\mathrm{sn}, \mathrm{cn}, \mathrm{dn}$ の特異点を除いた領域.

$\mathrm{sn}\, z, \mathrm{cn}\, z, \mathrm{dn}\, z$ ($z = u + \mathrm{i}v$) は Σ で正則関数であるから，複素関数論における一致の定理より，$\mathrm{sn}, \mathrm{cn}, \mathrm{dn}$ に対する微分方程式・加法定理等は複素関数に拡張してもそのまま成立する.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{sn}\, z = \mathrm{cn}\, z\, \mathrm{dn}\, z, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{cn}\, z = -\mathrm{sn}\, z\, \mathrm{dn}\, z, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{dn}\, z = -k^2\, \mathrm{sn}\, z\, \mathrm{cn}\, z,$$

$$\mathrm{sn}(z+w) = \frac{\mathrm{sn}\, z\, \mathrm{cn}\, w\, \mathrm{dn}\, w + \mathrm{sn}\, w\, \mathrm{cn}\, z\, \mathrm{dn}\, z}{1 - k^2\, \mathrm{sn}^2\, z\, \mathrm{sn}^2\, w},$$

$$\mathrm{cn}(z+w) = \frac{\mathrm{cn}\, z\, \mathrm{cn}\, w - \mathrm{sn}\, z\, \mathrm{dn}\, z\, \mathrm{sn}\, w\, \mathrm{dn}\, w}{1 - k^2\, \mathrm{sn}^2\, z\, \mathrm{sn}^2\, w},$$

$$\mathrm{dn}(z+w) = \frac{\mathrm{dn}\, z\, \mathrm{dn}\, w - k^2\, \mathrm{sn}\, z\, \mathrm{cn}\, z\, \mathrm{sn}\, w\, \mathrm{cn}\, w}{1 - k^2\, \mathrm{sn}^2\, z\, \mathrm{sn}^2\, w},$$

$$\mathrm{sn}(\mathrm{i}z; k) = \mathrm{i}\frac{\mathrm{sn}(z; k')}{\mathrm{cn}(z; k')}, \quad \mathrm{cn}(\mathrm{i}z; k) = \frac{1}{\mathrm{cn}(z; k')}, \quad \mathrm{dn}(\mathrm{i}z; k) = \frac{\mathrm{dn}(z; k')}{\mathrm{cn}(z; k')}.$$

(3/3) 複素関数としての Jacobi 楕円関数

加法定理と複素変数に対する楕円関数の公式より

$$\mathrm{sn}(z+\mathrm{i}K') = \frac{1}{k\,\mathrm{sn}\,z}, \quad \mathrm{cn}(z+\mathrm{i}K') = -\frac{\mathrm{i}}{k}\frac{\mathrm{dn}\,z}{\mathrm{sn}\,z}, \quad \mathrm{dn}(z+\mathrm{i}K') = -\mathrm{i}\frac{\mathrm{cn}\,z}{\mathrm{sn}\,z},$$

$$\mathrm{sn}(z+2\mathrm{i}K') = \mathrm{sn}\,z, \quad \mathrm{cn}(z+2\mathrm{i}K') = -\mathrm{cn}\,z, \quad \mathrm{dn}(z+2\mathrm{i}K') = -\mathrm{dn}\,z,$$

$$\mathrm{cn}(z+2K+2\mathrm{i}K') = \mathrm{cn}\,z, \quad \mathrm{dn}(z+4\mathrm{i}K') = \mathrm{dn}\,z.$$

(3/3) 複素関数としての Jacobi 楕円関数

加法定理と複素変数に対する楕円関数の公式より

$$\mathrm{sn}(z+\mathrm{i}K') = \frac{1}{k\,\mathrm{sn}\,z}, \quad \mathrm{cn}(z+\mathrm{i}K') = -\frac{\mathrm{i}}{k}\frac{\mathrm{dn}\,z}{\mathrm{sn}\,z}, \quad \mathrm{dn}(z+\mathrm{i}K') = -\mathrm{i}\frac{\mathrm{cn}\,z}{\mathrm{sn}\,z},$$

$$\mathrm{sn}(z+2\mathrm{i}K') = \mathrm{sn}\,z, \quad \mathrm{cn}(z+2\mathrm{i}K') = -\mathrm{cn}\,z, \quad \mathrm{dn}(z+2\mathrm{i}K') = -\mathrm{dn}\,z,$$

$$\mathrm{cn}(z+2K+2\mathrm{i}K') = \mathrm{cn}\,z, \quad \mathrm{dn}(z+4\mathrm{i}K') = \mathrm{dn}\,z.$$

Jacobi 楕円関数は二重周期関数である

	sn	cn	dn
周期	$4K,\ 2\mathrm{i}K'$	$4K,\ 2K+2\mathrm{i}K'$	$2K,\ 4\mathrm{i}K'$

(3/3) 複素関数としての Jacobi 楕円関数

Jacobi 楕円関数の零点・極

- 零点・極（すべて 1 位の零点・極，$m, n \in \mathbb{Z}$）

	零点	極
sn	$2mK + 2n\mathrm{i}K'$	$2mK + (2n+1)\mathrm{i}K'$
cn	$(2m+1)K + 2n\mathrm{i}K'$	$2mK + (2n+1)\mathrm{i}K'$
dn	$(2m+1)K + (2n+1)\mathrm{i}K'$	$2mK + (2n+1)\mathrm{i}K'$

上記の零点・極がすべて 1 位であることは「補遺 4」参照.

(3/3) 複素関数としての Jacobi 楕円関数

Jacobi 楕円関数の零点・極

- 零点・極（すべて 1 位の零点・極，$m, n \in \mathbb{Z}$）

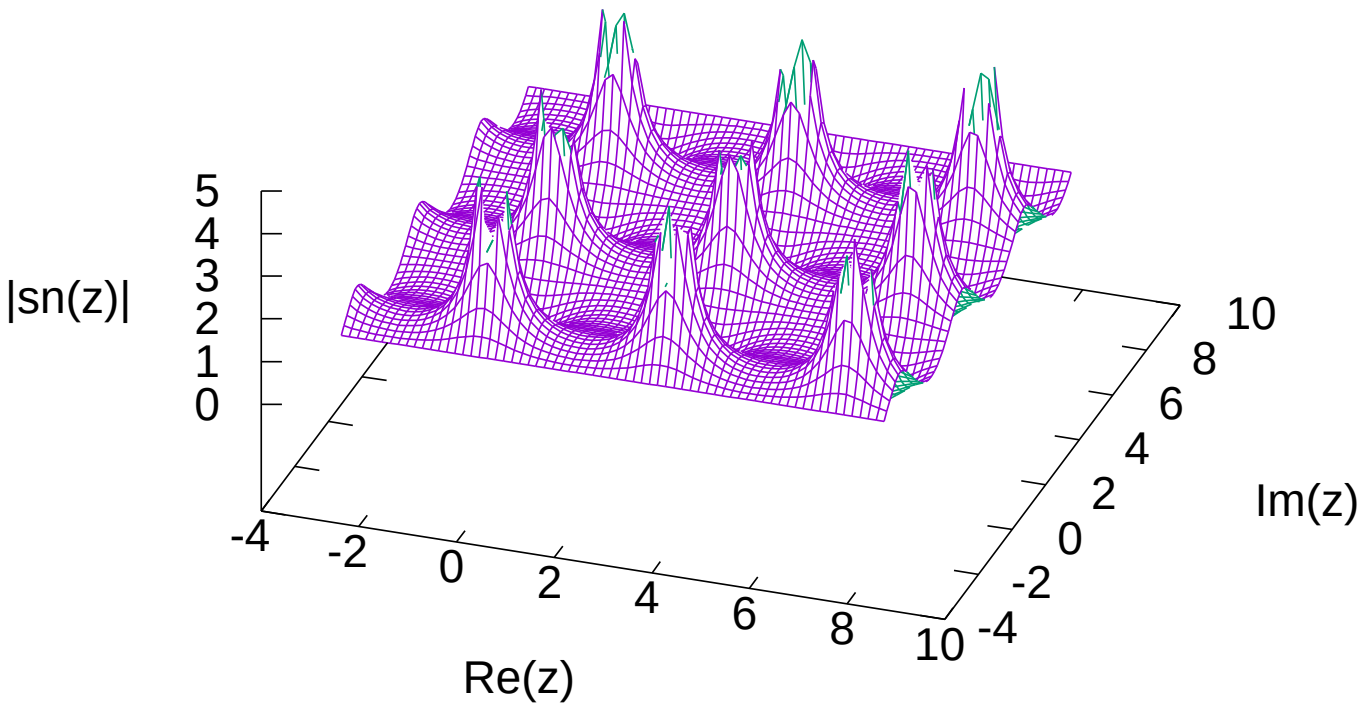
	零点	極
sn	$2mK + 2n\mathrm{i}K'$	$2mK + (2n+1)\mathrm{i}K'$
cn	$(2m+1)K + 2n\mathrm{i}K'$	$2mK + (2n+1)\mathrm{i}K'$
dn	$(2m+1)K + (2n+1)\mathrm{i}K'$	$2mK + (2n+1)\mathrm{i}K'$

上記の零点・極がすべて 1 位であることは「補遺 4」参照.

- Jacobi 楕円関数は全複素平面 $\mathbb{C}$ 上の有理型関数（特異点はすべて極である関数）である.
- Jacobi 楕円関数は二重周期関数である.

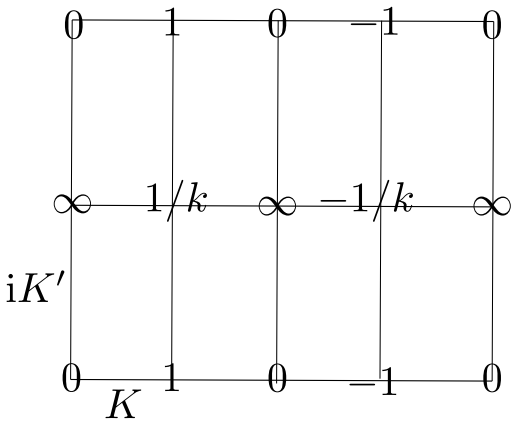
(3/3) 複素関数としての Jacobi 楕円関数

sn u の二重周期性.

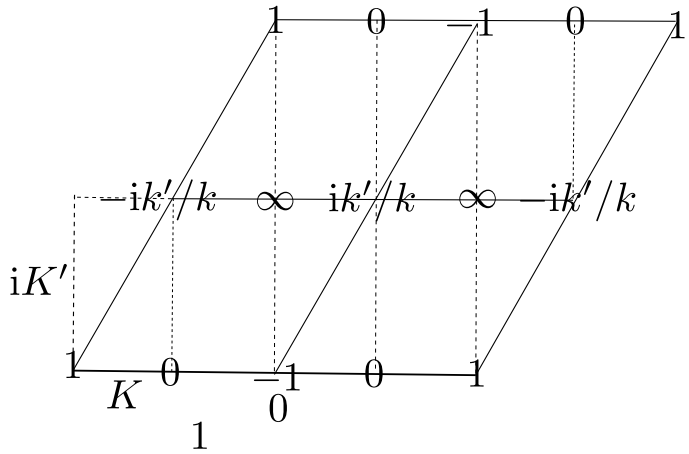


$|\,\mathrm{sn}(u;k)|$ の三次元グラフ ($k=\sqrt{0.5}$).

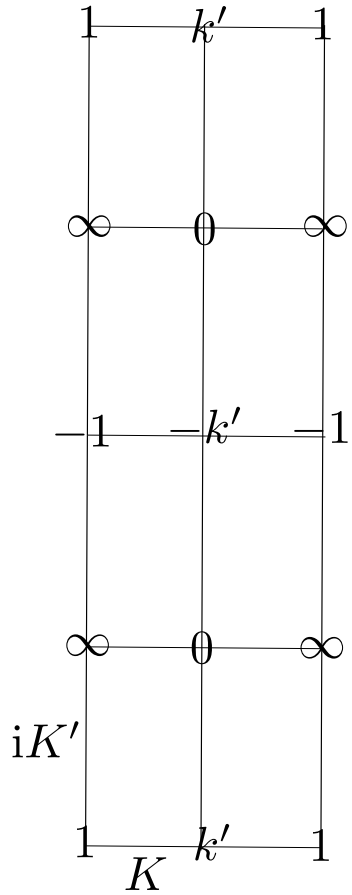
(3/3) 複素関数としての Jacobi 楕円関数



sn



cn



dn

Jacobi 楕円関数の周期平行四辺形.

まとめ

Jacobi 楕円関数 sn, cn, dn.

- （例題）単振り子の振動.
- Jacobi 楕円関数 sn, cn, dn の定義.

$$x = \operatorname{sn} u = \operatorname{sn}(u; k) \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad u = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$\operatorname{cn} u = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 u}, \quad \operatorname{dn} u = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u},$$

$$k\,(0 < k < 1) : \text{母数}.$$

- 加法定理.
- 複素関数への拡張.
- Jaboci 楕円関数は二重周期性をもつ，全複素平面 $\mathbb{C}$ 上の有理型関数である.

補遺 1：(2/3)cn, dn の加法定理

sn の加法定理

$$\mathrm{sn}(u+v) = \frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v + \mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{sn}^2\,v}$$

から cn の加法定理を得るには，次のように計算する．

$$\mathrm{cn}^2(u+v) = 1 - \mathrm{sn}^2(u+v) = 1 - \left(\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v + \mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\Delta}\right)^2,$$

$$\Delta = 1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{sn}^2\,v.$$

ここで，

$$\Delta = \mathrm{cn}^2\,u + \mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{dn}^2\,v = \mathrm{cn}^2\,v + \mathrm{sn}^2\,v\,\mathrm{dn}^2\,u$$

を用いれば，

$$\begin{aligned}
&\Delta^2 - (\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v + \mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u)^2 \\
&= (\mathrm{cn}^2\,u + \mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{dn}^2\,v)(\mathrm{cn}^2\,v + \mathrm{sn}^2\,v\,\mathrm{dn}^2\,u) - (\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v + \mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u)^2 \\
&= (\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v - \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,v)^2.
\end{aligned}$$

補遺 1：(2/3)cn, dn の加法定理

$$\therefore \quad \mathrm{cn}^2(u+v) = \left(\frac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v - \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,v}{\Delta} \right)^2 .$$

dn の加法定理は次のようにして得る.

$$\mathrm{dn}^2(u+v) = 1 - k^2\,\mathrm{sn}^2(u+v) = 1 - k^2 \left(\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v + \mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\Delta} \right)^2 .$$

$$\Delta = \mathrm{dn}^2\,u + k^2\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{cn}^2\,v = \mathrm{dn}^2\,v + k^2\,\mathrm{sn}^2\,v\,\mathrm{cn}^2\,u$$

を用いれば,

$$\begin{aligned}
&\Delta^2 - k^2(\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v + \mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u)^2 \\
&= (\mathrm{dn}^2\,u + k^2\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{cn}^2\,v)(\mathrm{dn}^2\,v + k^2\,\mathrm{sn}^2\,v\,\mathrm{cn}^2\,u) - k^2(\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v + \mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u)^2 \\
&= (\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v - k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,v)^2,
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \mathrm{dn}^2(u+v) = \left(\frac{\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v - k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,v}{\Delta} \right)^2 .$$

補遺2：(2/3) 加法定理の証明

（参考文献）J. V. Armitage & W. F. Eberlein: Elliptic Functions, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006.

略記.

$$s_1 = \mathrm{sn}\, u, \quad c_1 = \mathrm{cn}\, u, \quad d_1 = \mathrm{dn}\, u,$$
$$s_2 = \mathrm{sn}\, v, \quad c_2 = \mathrm{cn}\, v, \quad d_2 = \mathrm{dn}\, v.$$

$$S(u,v) := \frac{s_1 c_2 d_2 + s_2 c_1 d_1}{1 - k^2 s_1^2 s_2^2},$$
$$C(u,v) := \frac{c_1 c_2 - s_1 d_1 s_2 d_2}{1 - k^2 s_1^2 s_2^2},$$
$$D(u,v) := \frac{d_1 d_2 - k^2 s_1 c_1 s_2 d_2}{1 - k^2 s_1^2 s_2^2}.$$

証明すべき等式.

$$\mathrm{sn}(u+v) = S(u,v), \quad \mathrm{cn}(u+v) = C(u,v), \quad \mathrm{dn}(u+v) = D(u,v).$$

補遺2：(2/3) 加法定理の証明

まず，$\mathrm{sn}(u+v) = S(u,v)$ から証明する．

$$S(u,v) = \frac{s_1c_2d_2 + s_2c_1d_1}{\Delta}, \quad \Delta = 1 - k^2s_1^2s_2^2,$$

$$\begin{aligned}
\Delta^2\frac{\partial S}{\partial u} &= \Delta\frac{\partial}{\partial u}(s_1c_2d_2 + s_2c_1d_1) - (s_1c_2d_2 + s_2c_1d_1)\frac{\partial \Delta}{\partial u} \\
&= \Delta\left[c_1d_1c_2d_2 - s_2(s_1d_1^2 + k^2s_1c_1^2)\right] - (s_1c_2d_2 + s_2c_1d_1)(-2k^2s_1c_1d_1s_2^2) \\
&= c_1d_1c_2d_2(\Delta + 2k^2s_1^2s_2^2) - s_1s_2\left[\Delta(d_1^2 + k^2c_1^2) - 2k^2c_1^2d_1^2s_2^2\right] \\
&= c_1d_1c_2d_2(1 + k^2s_1^2s_2^2) - s_1s_2\left[d_1^2(\Delta - k^2c_1^2s_2^2) + k^2c_1^2(\Delta - s_2^2d_1^2)\right] \\
&= c_1d_1c_2d_2(1 + k^2s_1^2s_2^2) - s_1s_2(d_1^2d_2^2 + k^2c_1^2c_2^2) \\
&= (c_1c_2 - s_1s_2d_1d_2)(d_1d_2 - k^2s_1s_2c_1c_2) \\
&= \Delta^2 CD.
\end{aligned}$$

u, v についての対称性より，

$$\frac{\partial S}{\partial u} = \frac{\partial S}{\partial v} = CD.$$

補遺2：(2/3) 加法定理の証明

$z = u + v$, $w = u - v$ とおくと，

$$\frac{\partial S}{\partial w} = 0, \quad \therefore \quad S(u, v) = f(z) = f(u + v),$$

ここで f は未知関数である．

f を求めるため $v = 0$ とおくと，

$$f(u) = \mathrm{sn}\, u, \quad \therefore \quad S(u, v) = \mathrm{sn}(u + v).$$

次に，$\mathrm{dn}(u + v) = D(u, v)$, $\mathrm{cn}(u + v) = C(u, v)$ を示す．まず，

$$C^2(u, v) = 1 - S^2(u, v)$$

が成り立つことが示される（$\Delta = c_1^2 + s_1^2 d_2^2 = c_2^2 + s_2^2 d_1^2$ を用いる）．よって，

$$\mathrm{cn}^2(u + v) = 1 - \mathrm{sn}^2(u + v) = 1 - S^2 = C^2, \quad \therefore \quad \mathrm{cn}(u + v) = \pm C(u, v).$$

一方，

$$CD = \frac{\partial}{\partial u}\,\mathrm{sn}(u + v) = \mathrm{cn}(u + v)\,\mathrm{dn}(u + v), \tag{1}$$

$$\mathrm{cn}(u + v)\,\mathrm{dn}(u + v) = \pm\,\mathrm{cn}(u + v) D(u, v).$$

補遺2：(2/3) 加法定理の証明

$\mathrm{cn}(u+v) \neq 0$ ならば，$\mathrm{dn}(u+v) = \pm D(u+v)$．ここで，

$$D^2(u,v) = 1 - k^2 S^2(u,v) = 1 - k^2\,\mathrm{sn}^2(u+v) = \mathrm{dn}^2(u+v) \geq k'^2$$

が示される（$\Delta = d_1^2 + k^2 s_1^2 c_2^2 = d_2^2 + k^2 s_2^2 c_1^2$ を用いる）から，

$$D(u,v) \geq k', \quad \text{または} \quad D(u,v) \leq -k' \quad (\forall u, v \in \mathbb{R}).$$

$D(u,0) = \mathrm{dn}\,u \geq k'$ より，$D(u,v) \geq k' \quad (\forall u, v \in \mathbb{R})$.
$\mathrm{dn}(u+v) \geq k' \quad (\forall u, v \in \mathbb{R})$ より

$$D(u,v) = \mathrm{dn}(u+v) \quad \text{if} \quad \mathrm{cn}(u+v) \neq 0.$$

極限を考えれば，すべての $u, v \in \mathbb{R}$ に対して上の式が成り立つ．
この結果を前頁 (1) に代入して，

$$C(u,v) = \mathrm{cn}(u+v) \quad \text{if} \quad \mathrm{dn}(u+v) \neq 0.$$

極限を考えれば，すべての $u, v \in \mathbb{R}$ に対して上の式が成り立つ． ■

補遺 3：(3/3)sn, cn, dn の正則性の証明

$$S(u,v) := \mathrm{sn}(u+v) = \frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v + \mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{sn}^2\,v},$$

$$C(u,v) := \mathrm{cn}(u+v) = \frac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v - \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,v}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{sn}^2\,v},$$

$$D(u,v) := \mathrm{dn}(u+v) = \frac{\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v - k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,v}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{sn}^2\,v}$$

とおくと，

$$\mathrm{sn}(u+\mathrm{i}v) = S(u,\mathrm{i}v) =: \widetilde{S}(u,v),$$

$$\mathrm{cn}(u+\mathrm{i}v) = C(u,\mathrm{i}v) =: \widetilde{C}(u,v),$$

$$\mathrm{dn}(u+\mathrm{i}v) = D(u,\mathrm{i}v) =: \widetilde{D}(u,v).$$

$\widetilde{S}(u,v)$, $\widetilde{C}(u,v)$, $\widetilde{D}(u,v)$ が Cauchy-Riemann 関係式を満たすことを示せばよい．

補遺 3：(3/3)sn, cn, dn の正則性の証明

加法定理の証明の計算より，

$$\frac{\partial S(u,v)}{\partial u} = \frac{\partial S(u,v)}{\partial v} = C(u,v)D(u,v). \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{sn}(\mathrm{i}v)}{\mathrm{d}(\mathrm{i}v)} = \mathrm{cn}(\mathrm{i}v)\,\mathrm{dn}(\mathrm{i}v),\quad \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{cn}(\mathrm{i}v)}{\mathrm{d}(\mathrm{i}v)} = -\,\mathrm{sn}(\mathrm{i}v)\,\mathrm{dn}(\mathrm{i}v),\quad \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{dn}(\mathrm{i}v)}{\mathrm{d}(\mathrm{i}v)} = -k^2\,\mathrm{sn}(\mathrm{i}v)\,\mathrm{cn}(\mathrm{i}v)$$

の成立が確かめられるから，(2) で $v \to \mathrm{i}v$ とおいた式が成り立つ．

$$\frac{\partial \widetilde{S}(u,v)}{\partial u} = \frac{\partial \widetilde{S}(u,v)}{\partial(\mathrm{i}v)}.$$

変数を $z = u + \mathrm{i}v$, $\overline{z} = u - \mathrm{i}v$ に変換すると，上の式は次に書き換えられる．

$$\frac{\partial \widetilde{S}}{\partial \overline{z}} = 0.$$

これは，$\widetilde{S}(u,v)$ に対する Cauchy-Riemann 関係式と同値である．

補遺 3：(3/3)sn, cn, dn の正則性の証明

$C(u,v) = \mathrm{cn}(u+v)$ であるから，

$$\frac{\partial C(u,v)}{\partial u} = \frac{\partial C(u,v)}{\partial v} = \left.\frac{\partial \mathrm{cn}\,\zeta}{\partial \zeta}\right|_{\zeta=u+v} = -S(u,v)D(u,v).$$

前頁と同じ理由より，$v \to \mathrm{i}v$ とおくことができる．

$$\frac{\partial \widetilde{C}(u,v)}{\partial u} = \frac{\partial \widetilde{C}(u,v)}{\partial(\mathrm{i}v)}.$$

$z = u + \mathrm{i}v$, $\overline{z} = u - \mathrm{i}v$ と変数変換すると，

$$\frac{\partial \widetilde{C}}{\partial \overline{z}} = 0.$$

これは，$\widetilde{C}(u,v)$ に対する Cauchy-Riemann 関係式と同値である．

同様にして，$\widetilde{D}(u,v)$ に対する Cauchy-Riemann 関係式も示される．

■

補遺 4：(3/3)sn, cn, dn の零点・極

- $\operatorname{sn} z$ の $z = 2mK + 2ni K'$ $(m, n \in \mathbb{Z})$ における零点が 1 位であること．

$$\because \quad \left.\frac{\mathrm{d} \operatorname{sn} z}{\mathrm{d} z}\right|_{z=2mK+2ni K'} = \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z|_{z=2mK+2ni K'} \neq 0.$$

- 同様にして，$\operatorname{cn} z$ の $z = (2m+1)K + 2ni K'$ $(m, n \in \mathbb{Z})$ における零点，$\operatorname{dn} z$ の $z = (2m+1)K + (2n+1)i K'$ $(m, n \in \mathbb{Z})$ における零点も 1 位であることが示される．
- $\operatorname{sn} z$ の $z = 2mK + (2n+1)i K'$ $(m, n \in \mathbb{Z})$ における特異点が 1 位の極であること．

  $\because$ $\operatorname{sn} z = 1/\{k \operatorname{sn}(z - iK')\}$ であり，$\operatorname{sn}(z - iK')$ は $z = 2mK + (2n+1)i K'$ $(m, n \in \mathbb{Z})$ に 1 位の零点を持つから．
- $\operatorname{cn} z$ の $z = 2mK + (2n+1)i K'$ $(m, n \in \mathbb{Z})$ における特異点が 1 位の極であること．

  $\because$ $\operatorname{cn}(z; k) = 1/\operatorname{cn}(iz; k')$ であり，$\operatorname{cn}(iz; k')$ は $iz = (2n+1)K' + 2mi K$ $(m, n \in \mathbb{Z})$，すなわち，$z = 2mK + (2n+1)i K'$ $(m, n \in \mathbb{Z})$ に 1 位の零点を持つから．

補遺 4：(3/3)sn, cn, dn の零点・極

- $\mathrm{dn}\,z$ の $z = 2mK + (2n+1)\mathrm{i}K'$ $(m, n \in \mathbb{Z})$ における特異点が 1 位の極であること.

  ∵

  $$\mathrm{dn}\,z = -\mathrm{i}\frac{\mathrm{cn}(z - \mathrm{i}K')}{\mathrm{sn}(z - \mathrm{i}K')}.$$

  分母・分子の $z = 2mK + 2n\mathrm{i}K'$ $(m, n \in \mathbb{Z})$ における 1 位の極は互いに打ち消しあう．よって，$\mathrm{dn}\,z$ は $\mathrm{sn}(z - \mathrm{i}K')$ の 1 位の零点 $z = 2mK + (2n+1)\mathrm{i}K'$ $(m, n \in \mathbb{Z})$ に 1 位の極を持つ.