楕円関数論しょーとこーす (2)
テータ関数

緒方　秀教

電気通信大学　大学院情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻

2021 年 3 月 22 日（月）

この動画の目的

この動画は「楕円関数論しょーとこーす（１）」の続編です.
「しょーとこーす（１）」をご覧になってない方は,
まずそちらから御覧ください.
概要欄にリンクを張っておきます.

この動画では，楕円関数論動画シリーズのうち，テータ関数論を一本の動画に要約

本動画の内容

0. テータ関数を学ぶ動機.
1. テータ関数の定義（無限積）.
2. Jacobi 楕円関数のテータ関数表示.
3. テータ関数の無限和表示（Jacobi の三重積公式）.
4. Jacobi 楕円関数の数値計算.

(0/4) テータ関数を学ぶ動機

Jacobi 楕円関数 sn, cn, dn を数値計算したい.

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{sn}(u;k)\ \text{の零点}\ &: 2mK + 2n\mathrm{i}K' \\ \text{極}\ &: 2mK + (2n+1)\mathrm{i}K' \end{aligned}\right\} \quad (\ m, n \in \mathbb{Z},\ 1\ \text{位}\ ),$$

$$K = K(k),\ K' = K(k') \quad (\ k' = \sqrt{1-k^2}\ ) \quad \text{第 1 種完全楕円積分.}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{sn}(u;k) = \frac{u = 2mK + 2n\mathrm{i}K'\ \text{に零点をもつ関数}}{u = 2mK + (2n+1)\mathrm{i}K'\ \text{に零点をもつ関数}}\ ?.$$

テータ関数を使うと，sn などが上のように表される．

テータ関数は収束が速い→ Jacobi 楕円関数の数値計算.

(1/4) テータ関数の定義（無限積）

テータ関数（無限積による定義）

$$v\ :\ \text{複素変数},\quad \tau\ :\ \text{複素パラメータ s.t. } \operatorname{Im}\tau>0,\ q=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\tau},$$

$$\vartheta_1(v|\tau):=2q^{1/4}\sin\pi v\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}v})(1-q^{2n}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}v}),$$

$$\vartheta_2(v|\tau):=2q^{1/4}\cos\pi v\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}v})(1+q^{2n}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\tau}),$$

$$\vartheta_3(v|\tau):=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}v})(1+q^{2n-1}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}v}),$$

$$\vartheta_0(v|\tau):=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}v})(1-q^{2n-1}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}v}).$$

∗ $\vartheta_0(v|\tau)$ は $\vartheta_4(v|\tau)$ と記されることもある.

∗ 後出の「Jacobi の三重積公式」を覚えた後のほうが覚えやすいかも…

(1/4) テータ関数の定義（無限積）

テータ関数の $v=0$ における値もよく用いられる．
ただし，$\vartheta_1(v|\tau)$ については，$\vartheta_1(0|\tau)=0$ となるので $\vartheta_1'(0|\tau)$ を用いる．

テータ定数

$$\operatorname{Im}\tau>0,\quad q=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\tau},$$

$$\vartheta_1' := \vartheta_1'(0|\tau) = 2\pi q^{1/4}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^3,$$

$$\vartheta_2 := \vartheta_2(0|\tau) = 2q^{1/4}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n})^2,$$

$$\vartheta_3 := \vartheta_3(0|\tau) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1})^2,$$

$$\vartheta_0 := \vartheta_0(0|\tau) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n-1})^2.$$

$$\tau \ : \ \text{複素パラメータ} \quad \text{s.t.} \quad \mathrm{Im}\,\tau > 0, \quad q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\tau},$$

$$\vartheta_1(v|\tau) := 2q^{1/4} \sin \pi v \prod_{n=1}^{\infty}(1 - q^{2n}) \prod_{n=1}^{\infty}(1 - q^{2n}\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} v})(1 - q^{2n}\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} v}), \quad \text{etc.}$$

$\mathrm{Im}\,\tau > 0$ より $|q| = \mathrm{e}^{-\pi\,\mathrm{Im}\,\tau} < 1$ であるから，無限積は全複素平面 $\mathbb{C}$ で（広義一様）収束して，テータ関数は整関数（全複素平面 $\mathbb{C}$ で正則な関数）である．

(1/4) テータ関数の定義（無限積）：整関数，零点

$$\tau \ \text{：複素パラメータ} \quad \text{s.t.} \quad \operatorname{Im}\tau > 0, \quad q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\tau},$$

$$\vartheta_1(v|\tau) := 2q^{1/4}\sin\pi v \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}v})(1-q^{2n}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}v}), \quad \text{etc.}$$

$\operatorname{Im}\tau > 0$ より $|q| = \mathrm{e}^{-\pi\operatorname{Im}\tau} < 1$ であるから，無限積は全複素平面 $\mathbb{C}$ で（広義一様）収束して，テータ関数は整関数（全複素平面 $\mathbb{C}$ で正則な関数）である．

テータ関数の零点

	零点 ($m, n \in \mathbb{Z}$)
$\vartheta_1(v\|\tau)$	$m + n\tau$
$\vartheta_2(v\|\tau)$	$m + 1/2 + n\tau$
$\vartheta_3(v\|\tau)$	$m + 1/2 + (n+1/2)\tau$
$\vartheta_0(v\|\tau)$	$m + (n+1/2)\tau$

(1/4) テータ関数の定義（無限積）：零点

テータ関数の零点の見つけ方（$\vartheta_1(v|\tau)$ を例にして）.

$$\vartheta_1(v|\tau) = 2q^{1/4}\sin\pi v \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}v})(1-q^{2n}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}v}) \quad (\, q=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\tau}\,),$$

$$\text{零点}\quad u = m + n\tau \quad (\, m,n\in\mathbb{Z}\,).$$

多項式の零点を因数分解して見つけるのと同じ.

- $\sin\pi v = 0 \to 1$ 位の零点 $v = m\ (\, m\in\mathbb{Z}\,)$.
- $1-q^{2n}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}v} = 0\ (\, n=1,2,\dots\,)$ より

$$1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(n\tau+v)} = 0, \quad v+n\tau = m\in\mathbb{Z},$$

$$\therefore\quad v = m - n\tau \quad (\, m\in\mathbb{Z},\ n=1,2,\dots\,).$$

$$(\,1-q^{2n}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}v}\,)' = -2\pi\mathrm{i}q^{2n}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}v} \neq 0$$

  より，これらの零点は 1 位である（重根でない）.

- $1-q^{2n}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}v} = 0\ (\, n=1,2,\dots\,)$ から同様にして，

$$v = m + n\tau \quad (\, m\in\mathbb{Z},\ n=1,2,\dots\,)$$

  に 1 位の零点があることがわかる.

テータ関数は次のように二重周期性に近い性質を持つ．
これにより，Jacobi 楕円関数がテータ関数で表されることになる．

テータ関数の擬周期性 (1)

$$\vartheta_1(v+1|\tau) = -\vartheta_1(v|\tau),$$
$$\vartheta_2(v+1|\tau) = -\vartheta_2(v|\tau),$$
$$\vartheta_3(v+1|\tau) = \vartheta_3(v|\tau),$$
$$\vartheta_0(v+1|\tau) = \vartheta_0(v|\tau).$$
$$\vartheta_1(v+\tau|\tau) = -q^{-1}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}v}\vartheta_1(v|\tau),$$
$$\vartheta_2(v+\tau|\tau) = q^{-1}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}v}\vartheta_2(v|\tau),$$
$$\vartheta_3(v+\tau|\tau) = q^{-1}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}v}\vartheta_3(v|\tau),$$
$$\vartheta_0(v+\tau|\tau) = -q^{-1}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}v}\vartheta_0(v|\tau).$$

（証明）テータ関数の定義式から直接証明できる．

$$
\begin{aligned}
&\vartheta_1(v+\tau|\tau) \\
&= 2q^{1/4}\sin\pi(v+\tau)\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(v+\tau)})(1-q^{2n}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(v+\tau)}) \\
&\quad (q=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\tau}\ \text{であるから}) \\
&= -\mathrm{i}q^{1/4}(q\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi v}-q^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi v})\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n+2}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}v})(1-q^{2n-2}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}v}) \\
&= \mathrm{i}q^{-3/4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi v}(1-q^2\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}v})\frac{1-\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}v}}{1-q^2\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}v}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}v})(1-q^{2n}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}v}) \\
&= -2q^{-1}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}v}q^{1/4}\sin\pi v\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}v})(1-q^{2n}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}v}) \\
&= -q^{-1}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}v}\vartheta_1(v|\tau), \quad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

■

(1/4) テータ関数の定義（無限積）：擬周期性

テータ関数の擬周期性 (2)

$$
\begin{aligned}
\vartheta_1(v+1/2|\tau) &= \vartheta_2(v|\tau),\\
\vartheta_2(v+1/2|\tau) &= -\vartheta_1(v|\tau),\\
\vartheta_3(v+1/2|\tau) &= \vartheta_0(v|\tau),\\
\vartheta_0(v+1/2|\tau) &= \vartheta_3(v|\tau),\\
\vartheta_1(v+\tau/2|\tau) &= \mathrm{i}q^{-1/4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi v}\vartheta_0(v|\tau),\\
\vartheta_2(v+\tau/2|\tau) &= q^{-1/4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi v}\vartheta_3(v+\tau|\tau),\\
\vartheta_3(v+\tau/2|\tau) &= q^{-1/4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi v}\vartheta_2(v|\tau),\\
\vartheta_0(v+\tau/2|\tau) &= \mathrm{i}q^{-1/4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi v}\vartheta_1(v|\tau).
\end{aligned}
$$

（証明）これもテータ関数の定義式から直接証明できる．

$$
\begin{aligned}
&\vartheta_1(v+\tau/2|\tau) \\
&= 2q^{1/4}\sin\pi(v+\tau/2)\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(v+\tau/2)})(1-q^{2n}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(v+\tau/2)}) \\
&\quad (q=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\tau}\ \text{であるから}) \\
&= -\mathrm{i}q^{1/4}(q^{1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi v}-q^{-1/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi v})\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n+1}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}v})(1-q^{2n-1}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}v}) \\
&= \mathrm{i}q^{-1/4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi v}(1-q\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}v})\frac{1}{1-q\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}v}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n-1}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}v})(1-q^{2n-1}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}v}) \\
&= \mathrm{i}q^{-1/4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi v}\vartheta_0(v|\tau), \quad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

■

(2/4)Jacobi 楕円関数のテータ関数表示

$$\text{Jacobi 楕円関数} \quad \mathrm{sn}\, u = \mathrm{sn}(u; k),$$

$$f(u) := \frac{\vartheta_1(u/2k|\tau)}{\vartheta_0(u/2K|\tau)}, \quad \tau = \mathrm{i}\frac{K'}{K}.$$

いずれも，

- 全複素平面 $\mathbb{C}$ 上の有理型関数．同じ零点・極をもつ．
  零点（1 位）: $2mK + 2n\mathrm{i}K'$，極（1 位）: $2mK + (2n+1)\mathrm{i}K'$ ($m, n \in \mathbb{Z}$).
- 二重周期関数．周期 $4K, 2\mathrm{i}K'$.

$f(u)$ の二重周期性の確認.

$$f(u+2K) = \frac{\vartheta_1(u/2K+1|\tau)}{\vartheta_0(u/2K+1|\tau)} = -\frac{\vartheta_1(u/2K|\tau)}{\vartheta_0(u/2K|\tau)} = -f(u),$$

$$f(u+4K) = f(u),$$

$$f(u+2\mathrm{i}K') = \frac{\vartheta_1(u/2K+\tau|\tau)}{\vartheta_0(u/2K+\tau|\tau)} = \frac{-q^{-1}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}u/2K}\vartheta_1(u/2K|\tau)}{-q^{-1}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}u/2K}\vartheta_0(u/2K|\tau)}$$

$$= \frac{\vartheta_1(u/2K|\tau)}{\vartheta_0(u/2K|\tau)} = f(u).$$

(2/4)Jacobi 楕円関数のテータ関数表示

$$F(u) := \frac{\mathrm{sn}\, u}{f(u)}.$$

- 二重周期関数. 周期 $4K, 2\mathrm{i}K'$.
- 整関数（全複素平面 $\mathbb{C}$ で正則な関数）である.

  $\because$ 分母分子の零点・極は互いに打ち消しあう.

$F(u)$ は全複素平面 $\mathbb{C}$ で有界な整関数である.

$$F(u) := \frac{\operatorname{sn} u}{f(u)}.$$

- 二重周期関数. 周期 $4K, 2\mathrm{i}K'$.
- 整関数（全複素平面 $\mathbb{C}$ で正則な関数）である.

  $\because$ 分母分子の零点・極は互いに打ち消しあう.

$F(u)$ は全複素平面 $\mathbb{C}$ で有界な整関数である.

Liouville の定理（複素関数論）

全複素平面 $\mathbb{C}$ で有界な整関数は定数関数に限る.

この定理は楕円関数論では頻出である.

$$F(u) \equiv \text{const.} \quad \therefore \quad \operatorname{sn} u = Cf(u) = C\frac{\vartheta_1(u/2K|\tau)}{\vartheta_0(u/2K|\tau)} \quad (\ C\ :\ \text{const.}\ ).$$

(2/4)Jacobi 楕円関数のテータ関数表示

$$\mathrm{sn}\, u = C\frac{\vartheta_1(u/2K|\tau)}{\vartheta_0(u/2K|\tau)} \quad (\, C \;:\; \mathrm{const.}\,).$$

C を決めるために $u = K$ と置くと，

$$1 = C\frac{\vartheta_1(1/2|\tau)}{\vartheta_0(1/2|\tau)} = C\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}, \quad C = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2},$$

$$\therefore \quad \mathrm{sn}\, u = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_1(u/2K|\tau)}{\vartheta_0(u/2K|\tau)}, \quad \tau = \mathrm{i}\frac{K'}{K}.$$

同様の考察により，

$$\mathrm{cn}\, u = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_2(u/2K|\tau)}{\vartheta_0(u/2K|\tau)}, \quad \mathrm{dn}\, u = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_3}\frac{\vartheta_3(u/2K|\tau)}{\vartheta_0(u/2K|\tau)}.$$

(2/4)Jacobi 楕円関数のテータ関数表示

Jacobi 楕円関数の諸パラメータをテータ定数で表す.

$$\mathrm{dn}\, u = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_3} \frac{\vartheta_3(u/2K|\tau)}{\vartheta_0(u/2K|\tau)}.$$

$u = K$ と置くと,

$$k' = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_3} \frac{\vartheta_3(1/2|\tau)}{\vartheta_0(1/2|\tau)} = \left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_3}\right)^2,$$

$$\mathrm{sn}(u + \mathrm{i}K') = \frac{1}{k} \frac{1}{\mathrm{sn}\, u},$$

$$\text{左辺} = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2} \frac{\vartheta_1(u/2K + \tau/2|\tau)}{\vartheta_0(u/2K + \tau/2|\tau)} = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2} \frac{\vartheta_0(u/2K|\tau)}{\vartheta_1(u/2K|\tau)}, \quad \therefore \quad k\, \mathrm{sn}\, u = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3} \frac{\vartheta_1(u/2K|\tau)}{\vartheta_0(u/2K|\tau)}.$$

$u = K$ と置くと,

$$k = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3} \frac{\vartheta_1(1/2|\tau)}{\vartheta_0(1/2|\tau)} = \left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\right)^2.$$

(2/4)Jacobi 楕円関数のテータ関数表示

$$k = \left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\right)^2, \quad k' = \left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_3}\right)^2, \tag{1}$$

$$\operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1(u/2K|\tau)}{\vartheta_0(u/2K|\tau)}, \quad \operatorname{cn} u = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\vartheta_2(u/2K|\tau)}{\vartheta_0(u/2K|\tau)},$$

$$\operatorname{dn} u = \sqrt{k'} \frac{\vartheta_3(u/2K|\tau)}{\vartheta_0(u/2K|\tau)}.$$

(1) を $k^2 + {k'}^2 = 1$ に代入して,

$$\vartheta_2^4 + \vartheta_0^4 = \vartheta_3^4.$$

(3/4) テータ関数の無限和表示

テータ関数の無限和表示

$$\operatorname{Im}\tau > 0, \quad q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\tau},$$

$$\vartheta_1(v|\tau) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+1/2)^2}\sin(2n+1)\pi v,$$

$$\vartheta_2(v|\tau) = 2\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1/2)^2}\cos(2n+1)\pi v,$$

$$\vartheta_3(v|\tau) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\cos 2n\pi v,$$

$$\vartheta_0(v|\tau) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos 2n\pi v.$$

$|q| < 1$ より，各式の右辺は急速に収束する．

→テータ関数の数値計算．

(3/4) テータ関数の無限和表示

無限和表示の導出には，次の公式が基本的である．

Jacobi の三重積公式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^{2n} = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1}z^2)(1+q^{2n-1}z^{-2})$$

$$(\, z \neq 0, \quad |q| < 1\,).$$

（Jabobi の三重積公式の証明）

$$f(z) := \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1}z^2)(1+q^{2n-1}z^{-2}).$$

$f(z)$ のベキ級数展開を考える．対称性よりベキ級数は次の形となる．

$$f(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z^{2n}+z^{-2n}).$$

(Step 1/2)　はじめに，係数 a_n ($n=1,2,\dots$) を a_0 で表す．
そのために，a_n に対する漸化式を求める．

$$\begin{aligned} f(qz) &= \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n+1}z^2)(1+q^{2n-3}z^{-2}) \\ &= \frac{1+q^{-1}z^{-2}}{1+qz^2}\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1}z^2)(1+q^{2n-1}z^{-2}) \\ &= q^{-1}z^{-2}f(z), \end{aligned}$$

$$\therefore \quad qz^2 f(qz) = f(z).$$

$$qz^2 f(qz) = f(z).$$

これを用いてベキ級数係数 a_n に対する漸化式を求める.

$$qz^2 f(qz) = qz^2 \left\{ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (q^{2n} z^{2n} + q^{-2n} z^{-2n}) \right\}$$
$$= q^{-1} a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{2n-1} a_{n-1} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{-2n-1} a_{n+1} z^{-2n}.$$

これが $f(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z^{2n} + z^{-2n})$ に等しいから，係数比較により

$$a_n = q^{2n-1} a_{n-1} \quad (\, n = 1, 2, \dots).$$

$$a_1 = q a_0, \quad a_2 = q^3 a_1 = q^{3+1} a_0 = q^4 a_0, \quad \dots, a_n = q^{1+3+5+\cdots+(2n-1)} a_0 = q^{n^2} a_0,$$

$$\therefore \quad f(z) = a_0(q) \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} (z^{2n} + z^{-2n}) \right\}$$
$$= \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n-1} z^2)(1 + q^{2n-1} z^{-2}).$$

ここで，係数 a_0 は q に依存することを明示するため，$a_0 = a_0(q)$ と記した.

(Step 2/2) ここは少々テクニカルである．

$$a_0(q)\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}(z^{2n}+z^{-2n})\right\} = \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1}z^2)(1+q^{2n-1}z^{-2}). \tag{2}$$

係数 $a_0(q)$ を求める．(2) で $z=\mathrm{i}$ と置いて，

$$a_0(q)\left\{1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\right\} = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})^2. \tag{3}$$

(3) で $q \to q^4$ と置いて，

$$a_0(q^4)\left\{1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{4n^2}\right\} = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{8n-4})^2. \tag{4}$$

一方，(2) で $z=\sqrt{\mathrm{i}}$ と置いて，

$$a_0(q)\left\{1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{4n^2}\right\} = \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{4n-2}). \tag{5}$$

(4)÷(5) を作って，

(3/4) 無限和表示：三重積公式の証明

$$\frac{a_0(q^4)}{a_0(q)} = \frac{\prod(1-q^{8n-4})^2}{\prod(1+q^{4n-2})} = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{4n-2})(1-q^{8n-4})$$

ここで少々テクニカルな変形を行う．

$$\frac{a_0(q^4)}{a_0(q)} = \frac{\prod(1-q^{4n-2})(1-q^{8n-4})(1-q^{8n})}{\prod(1-q^{8n})}$$

右辺の分子は

（$m \equiv 2 \mod 4$ についての積）×（$m \equiv 4 \mod 8$ についての積）
×（$m \equiv 0 \mod 8$ についての積）
＝（偶数 m についての積）

となるから，

$$\frac{a_0(q^4)}{a_0(q)} = \frac{\prod(1-q^{2n})}{\prod(1-q^{8n})}.$$

(3/4) 無限和表示：三重積公式の証明

一般に,

$$\frac{a_0(q^{4^r})}{a_0(q^{4^{r-1}})} = \frac{\prod(1-q^{2\cdot 4^{r-1}n})}{\prod(1-q^{2\cdot 4^r n})} \quad (r = 1, 2, \dots).$$

$$\frac{a_0(q^{4^r})}{a_0(q)} = \frac{a_0(q^4)}{a_0(q)} \frac{a_0(q^{4^2})}{a_0(q^4)} \cdots \frac{a_0(q^{4^r})}{a_0(q^{4^{r-1}})} = \frac{\prod(1-q^{2n})}{\prod(1-q^{2\cdot 4^r n})}.$$

$r \to \infty$ とすると, $|q| < 1$, $\lim_{q\to 0} a_0(q) = 1$ より

$$\frac{1}{a_0(q)} = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}),$$

$$\therefore \quad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}(z^{2n} + z^{-2n}) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}) \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1}z^2)(1+q^{2n-1}z^{-2}).$$

■

(3/4) テータ関数の無限和表示

Jacobi の三重積公式からテータ関数の無限和表示が得られる.

三重積公式 $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^{2n} = \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n})(1+q^{2n-1}z^2)(1+q^{2n-1}z^{-2})$$

$$(\ w \neq 0, \quad |q| < 1\ ).$$

$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi v}$ を代入して,

$$\begin{aligned}\vartheta_3(v|\tau) &= \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n})(1+q^{2n-1}\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} v})(1+q^{2n-1}\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} v}) \\ &= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos 2n\pi v.\end{aligned}$$

他のテータ関数についても同様である.

(4/4)Jacobi 楕円関数の数値計算

Jacobi 楕円関数の数値計算

k ($0 < k < 1$) : 母数.

1. 第 1 種完全楕円積分 $K = K(k), K' = K(k')$ を計算する（後述）.
2. $\tau = \mathrm{i}K'/K$ ($q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\tau} = \mathrm{e}^{-\pi K'/K}$).
3. テータ関数（無限和表示）を用いて sn, cn, dn を計算する.

$$\operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1(u/2K|\tau)}{\vartheta_0(u/2K|\tau)},$$

$$\operatorname{cn} u = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\vartheta_2(u/2K|\tau)}{\vartheta_0(u/2K|\tau)},$$

$$\operatorname{dn} u = \sqrt{k'} \frac{\vartheta_3(u/2K|\tau)}{\vartheta_0(u/2K|\tau)}.$$

第 1 種完全楕円積分の数値計算.

$$K = K(k) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

算術幾何平均で計算できる： $K = \dfrac{\pi/2}{\mathrm{AGM}(k', 1)} \quad (\, k' = \sqrt{1-k^2}\,).$ (6)

第 1 種完全楕円積分の数値計算.

$$K = K(k) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

算術幾何平均で計算できる： $K = \dfrac{\pi/2}{\mathrm{AGM}(k', 1)}$ $\quad (k' = \sqrt{1-k^2}).$ (6)

算術幾何平均 (arithmetic geometric mean) a, b ($a > b$) 正の数.

$$a_0 = a, \quad b_0 = b, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$\Downarrow$$

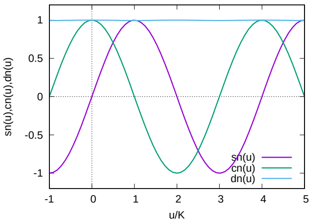
$$b_0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq a_2 \leq a_1 \leq a_0,$$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ 極めて収束が速い.

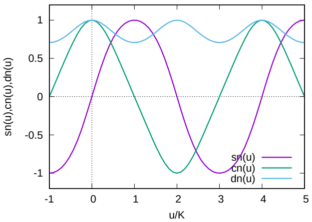
a, b の算術幾何平均 $\mathrm{AGM}(a, b) := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$

(6) の証明：動画「楕円関数論・番外編 (1)」参照.

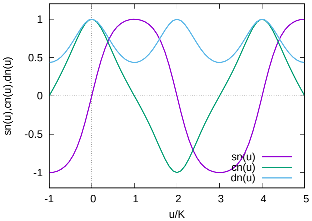
(4/4)Jacobi 楕円関数の数値計算



$k = 0.1$



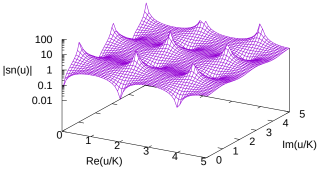
$k = \sqrt{0.5}$



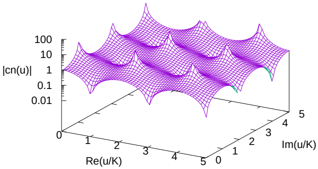
$k = 0.9$

k	K
0.1	1.57474 55615 17356
$\sqrt{0.5}$	1.85407 46773 01372
0.9	2.28054 91384 22770

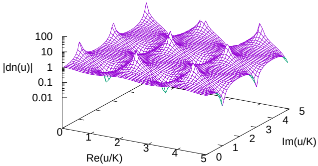
(4/4)Jacobi 楕円関数の数値計算



$|\operatorname{sn} u|$



$|\operatorname{cn} u|$



複素平面上の $|\operatorname{sn} u|, |\operatorname{cn} u|, |\operatorname{dn} u|$ のグラフ ($k = \sqrt{0.5}$).

まとめ

- テータ関数の導入（無限積表示）.
  - 格子状の零点を持つ整関数.
- Jacobi 楕円関数のテータ関数による表示.
  - Liouville の定理（複素関数論）.
- テータ関数の無限和表示.
  - Jacobi の三重積公式.
  - 急速に収束する.
- Jacobi 楕円関数のテータ関数による数値計算.