数値解析と複素関数論 (8)
代用電荷法による解析関数近似 (1)

緒方　秀教

電気通信大学　大学院情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻

2021 年 4 月 26 日（月）

今回の内容

- 代用電荷法：ポテンシャル問題の数値解法

$$\triangle u = 0, \quad \triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{（二次元問題）}$$

  - 点電荷ポテンシャルの重ね合わせで解を近似.
  - 計算（プログラミング）が簡単，計算量は少ない.
  - ある条件下で高精度を達成.
- 代用電荷法による複素解析関数の近似.
- 二次元ポテンシャル流問題への応用.

村島定行：代用電荷法とその応用 POD 版—境界値問題の半解析的近似解法—, 森北出版 (2008).

(1/3) 代用電荷法—ポテンシャル問題の数値解法

二次元ポテンシャル問題

$$\begin{cases} -\triangle u = 0 & \text{in } \mathscr{D} \\ u = f & \text{on } \partial\mathscr{D}, \end{cases}$$

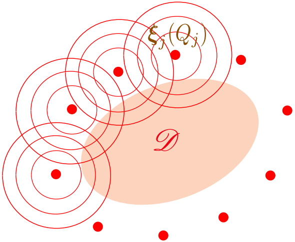
$$\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^2 \quad \text{領域.}$$

(1/3) 代用電荷法—ポテンシャル問題の数値解法

二次元ポテンシャル問題

$$\begin{cases} -\triangle u = 0 & \text{in } \mathscr{D} \\ u = f & \text{on } \partial\mathscr{D}, \end{cases}$$

$$\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^2 \quad \text{領域.}$$



代用電荷法

二次元点電荷ポテンシャルの重ね合わせで解を近似する.

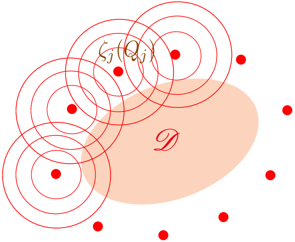
$$u(\boldsymbol{x}) \simeq u_N(\boldsymbol{x}) = Q_0 - \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N} Q_j \log \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}_j\|,$$

$$\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_N \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathscr{D}} \quad \text{電荷点 (given)},$$

$$Q_0 \in \mathbb{R},\ Q_1, \ldots, Q_N \in \mathbb{R} \quad \text{電荷 (unknown)}, \quad \sum_{j=1}^{N} Q_j = 0.$$

二次元 Euclid 平面 $\mathbb{R}^2$ を複素平面 $\mathbb{C}$ と同一視する．

$$\boldsymbol{x} = (x, y) \;\leftrightarrow\; z = x + \mathrm{i}y \quad \text{（同一視）},$$
$$\mathscr{D} \subset \mathbb{C} \quad \text{複素領域}.$$



代用電荷法（複素数表示）

二次元点電荷ポテンシャルの重ね合わせで解を近似する．

$$u(z) \simeq u_N(z) = Q_0 - \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N} Q_j \log|z - \zeta_j|,$$

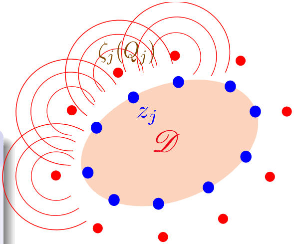
$$\zeta_1, \ldots, \zeta_N \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathscr{D}} \quad \text{電荷点 (given)},$$

$$Q_0 \in \mathbb{R},\; Q_1, \ldots, Q_N \in \mathbb{R} \quad \text{電荷 (unknown)}, \quad \sum_{j=1}^{N} Q_j = 0.$$

$$u(z) \simeq u_N(z) = Q_0 - \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N} Q_j \log|z - \zeta_j|,$$

- 近似解 $u_N(z)$ は $\mathscr{D}$ で Laplace 方程式 $\triangle u_N = 0$ を厳密に満たす.
- 境界条件 $u = f$ on $\partial\mathscr{D}$

$\Downarrow$



拘束条件

$$u_N(z_i) = f(z_i) \quad (\, i = 1, \ldots, N \,),$$

$z_1, \ldots, z_N \in \partial\mathscr{D}$ 拘束点 (given)

拘束条件 & $\sum_{j=1}^{N} Q_j = 0 \;\rightarrow\;$ 電荷 $Q_0, Q_1, \ldots, Q_N$ が決まる.

(1/3) 代用電荷法—ポテンシャル問題の数値解法

拘束条件& $\sum_{j=1}^{N} Q_j = 0 \ \rightarrow$ 電荷 $Q_0, Q_1, \ldots, Q_N$ が決まる.

電荷 $Q_0, Q_1, \ldots, Q_N$ が満たす連立一次方程式

$$\begin{bmatrix} G_{11} & \cdots & G_{1N} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ G_{N1} & \cdots & G_{NN} & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_N \\ Q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(z_1) \\ \vdots \\ f(z_N) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$G_{ij} = -\frac{1}{2\pi} \log |z_i - \zeta_j|, \quad 1 \leq i, j \leq N.$$

- 係数行列は小規模密行列（N は数十 $\sim$ 数百程度）.
- 直接解法（LU 分解など）で解く.

(1/3) 代用電荷法—ポテンシャル問題の数値解法

$$u(z) \simeq u_N(z) = Q_0 - \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N} Q_j \log|z-\zeta_j|,$$

$$\zeta_1, \ldots, \zeta_N \in \mathbb{C}\setminus\overline{\mathscr{D}}, \quad Q_0, Q_1, \ldots, Q_N \in \mathbb{R} \quad \left(\sum_{j=1}^{N} Q_j = 0\right).$$

電荷に対する条件 $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} Q_j = 0$ の意味.

スケール変換 $z \to cz$ (c : const.) に対して解 $u_N(z)$ は不変である.

$$\begin{aligned} & Q_0 - \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N} Q_j \log|cz - c\zeta_j| \\ &= Q_0 - \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N} Q_j \log|z-\zeta_j| - \frac{1}{2\pi}\underbrace{\left\{\sum_{j=1}^{N} Q_j\right\}}_{0}\log c = u_N(z). \end{aligned}$$

(1/3) 代用電荷法—ポテンシャル問題の数値解法

$$u(z) \simeq u_N(z) = Q_0 - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{N} Q_j \log|z - \zeta_j|,$$

$$\zeta_1, \ldots, \zeta_N \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathscr{D}}, \quad Q_0, Q_1, \ldots, Q_N \in \mathbb{R} \quad \left(\sum_{j=1}^{N} Q_j = 0 \right).$$

電荷に対する条件 $\sum_{j=1}^{N} Q_j = 0$ の意味.

スケール変換 $z \to cz$ (c : const.) に対して解 $u_N(z)$ は不変である.

室田一雄：代用電荷法におけるスキームの「不変性」について，
情報処理学会論文誌，**34** (1993) 533–535.

(1/3) 代用電荷法：数値例

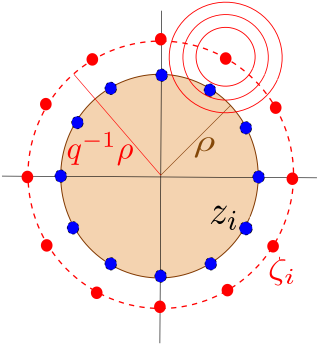
円板領域上のポテンシャル問題

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & |z| < \rho \\ u = f & |z| = \rho. \end{cases}$$

拘束点 z_i，電荷点 ζ_i ($i = 1, \ldots, N$).
同心円上に等間隔・同位相にとる.

$$z_i = \rho\omega^{i-1}, \quad \zeta_i = q^{-1}\rho\omega^{i-1}$$

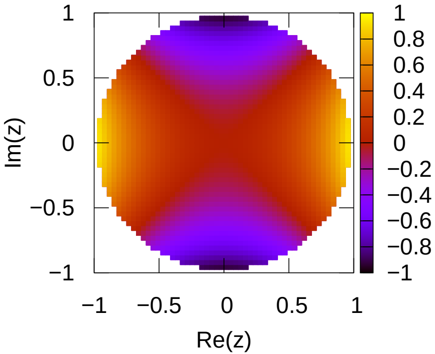
$$\left(\omega = \exp\left(\frac{2\pi\mathrm{i}}{N}\right), \, 0 < q < 1 \right).$$



(1/3) 代用電荷法：数値例

円板領域上のポテンシャル問題.

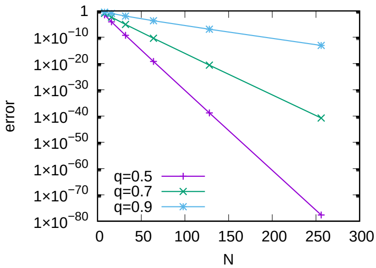
$$\begin{cases} \triangle u = 0 & |z| < \rho \\ u = f & |z| = \rho, \end{cases} \qquad f = x^2 - y^2.$$

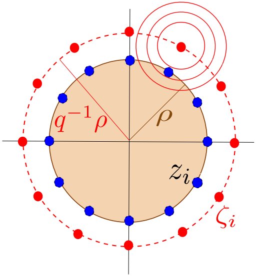


代用電荷法による近似解.

誤差：最大値原理より境界 $|z| = \rho$ 上で誤差の最大値を取る．

$$\epsilon_N := \max_{|z|\leq\rho} |u(z) - u_N(z)| = \max_{|z|=\rho} |u(z) - u_N(z)|.$$





縦軸：誤差 ϵ_N
縦軸：電荷点数 N

- 指数関数的収束．
- 電荷点が領域 $|z| < \rho$ から離れるほど（q が小さいほど），収束は速くなる．

(1/3) 代用電荷法：円板領域問題についての理論誤差評価

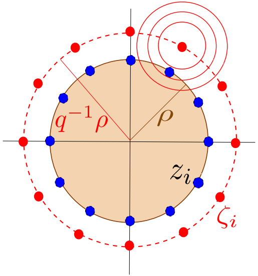
定理　円板領域 $|z| < \rho$ の問題に代用電荷法を適用する．

- 拘束点 z_i，電荷点 ζ_i ($i = 1, \ldots, N$).

$$z_i = \rho\omega^{i-1}, \quad \zeta_i = q^{-1}\rho\omega^{i-1}$$

$$\left(\omega = \exp\left(\frac{2\pi \mathrm{i}}{N}\right), \quad 0 < q < 1 \right).$$

- 境界値 f は円周近傍 $\rho^2/r_0 \le |z| \le r_0$ ($r_0 > \rho$) で解析的．



このとき，代用電荷法の近似解は指数関数的収束する．

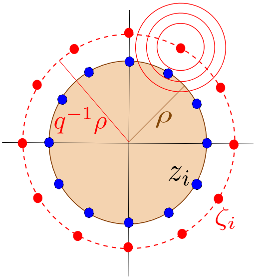
$$\sup_{|z|\le\rho} |u(z) - u_N(z)| = \begin{cases} \mathrm{O}((\rho/r_0)^{N/2}) & (\rho/r_0 \ge q^2) \\ \mathrm{O}(q^N) & (\rho/r_0 < q^2). \end{cases}$$

M. Katsurada & H. Okamoto: A mathematical study of the charge simulation method I, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, Math. **35** (1988) 507–518.

(1/3) 代用電荷法：数値例

先程の数値例の結果を理論誤差評価と比較する．

	誤差 ϵ_N	
q	数値実験	理論誤差評価
0.5	$\mathrm{O}(0.49^N)$	$\mathrm{O}(0.5^N)$
0.7	$\mathrm{O}(0.69^N)$	$\mathrm{O}(0.7^N)$
0.9	$\mathrm{O}(0.89^N)$	$\mathrm{O}(0.9^N)$



- 理論誤差評価は数値実験結果とよく符合する．
- 円板領域問題に対しては代用電荷法は高精度を達成する（指数関数的収束）．

(1/3) 代用電荷法

円板領域以外の領域の問題でも⋯

問題領域が解析的な曲線を境界に持ち，境界値 f が解析的ならば，
代用電荷法は指数関数的収束する．

- M. Katsurada: Asymptotic error analysis of the charge simulation method in a Jordan region with an analytic boundary, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, Math. **37** (1990) 635–657.
- H. Ogata & M. Katsurada: Convergence of the invariant scheme of the method of fundamental solutions for two-dimensional potential problems in a Jordan region, Japan J. Indust. Comput. Math. **31** (2014) 231–262.
- 西田詩：2 次元楕円領域における代用電荷法の数学的及び数値的考察，日本応用数理学会論文誌，**5** (1995) 185–198.

(1/3) 代用電荷法

円板領域以外の領域の問題でも⋯

問題領域が解析的な曲線を境界に持ち，境界値 f が解析的ならば，
代用電荷法は指数関数的収束する.

- M. Katsurada: Asymptotic error analysis of the charge simulation method in a Jordan region with an analytic boundary, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, Math. **37** (1990) 635–657.
- H. Ogata & M. Katsurada: Convergence of the invariant scheme of the method of fundamental solutions for two-dimensional potential problems in a Jordan region, Japan J. Indust. Comput. Math. **31** (2014) 231–262.
- 西田詩：2 次元楕円領域における代用電荷法の数学的及び数値的考察，日本応用数理学会論文誌，**5** (1995) 185–198.

代用電荷法の特徴

- 計算（プログラミング）が簡単で計算量が少ない.
- ある条件下で高精度を達成する.

(2/3) 代用電荷法による解析関数近似

ある複素領域 $\mathscr{D}$ における複素解析関数 $f(z)$ の近似を考える.

(2/3) 代用電荷法による解析関数近似

ある複素領域 $\mathscr{D}$ における複素解析関数 $f(z)$ の近似を考える.

- $\mathrm{Re}\, f(z)$: $\mathscr{D}$ 上で調和関数である（Laplace 方程式の解）.
  $\to$ 代用電荷法により近似できる.

$$\mathrm{Re}\, f(z) \simeq Q_0 - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{N} Q_j \log |z - \zeta_j|,$$

$$Q_0, Q_1, \ldots, Q_N \in \mathbb{R}, \quad \sum_{j=1}^{N} Q_j = 0, \quad \zeta_1, \ldots, \zeta_N \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathscr{D}}.$$

- $\mathrm{Im}\, f(z)$: $\mathrm{Re}\, f(z)$ の共役調和関数.

$$\mathrm{Im}\, f(z) \simeq Q_0' - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{N} Q_j \arg(z - \zeta_j).$$

$\log z = \log |z| + \mathrm{i} \arg z$ に注意すれば，複素解析関数 $f(z)$ に対する代用電荷法による近似が得られる.

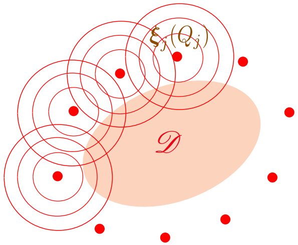
複素解析関数の代用電荷法近似

$f(z)$: 複素領域 $\mathscr{D}$ における解析関数.

$$f(z) \simeq \widehat{Q}_0 - \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N} Q_j \log(z-\zeta_j),$$

$$\widehat{Q}_0 \in \mathbb{C}, \quad Q_1, \ldots, Q_N \in \mathbb{R}, \quad \sum_{j=1}^{N} Q_j = 0,$$

$$\zeta_1, \ldots, \zeta_N \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathscr{D}}.$$



複素対数ポテンシャルの重ね合わせで複素解析関数が近似できる.

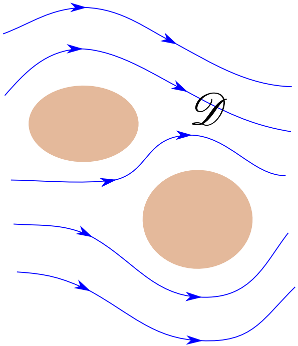
(2/3) 代用電荷法による解析関数近似

代用電荷法による解析関数近似.
元来は数値等角写像で考案され用いられた.

- 天野要：代用電荷法に基づく等角写像の数値計算法：情報処理学会論文誌, **28** (1987) 697—704.
- K. Amano: A charge simulation method for the numerical conformal mapping of interior, exterior and doubly-connected domains, J. Comput. Appl. Math., **53** (1994) 353–370.
- K. Amano: A charge simulation method for numerical conformal mapping onto circular and radial slit domains, SIAM J. Sci. Comput. **19** (1998) 1169–1187.
- 天野要，岡野大，緒方秀教，下平博巳，杉原正顯：代用電荷法による非有界な多重連結領域の統一的な数値等角写像の方法，情報処理学会論文誌, **42** (2001) 385–395.

二次元ポテンシャル流

- 非圧縮流体の二次元渦なし流れ.
- 複素解析関数で記述される.



(3/3) 代用電荷法の応用：二次元ポテンシャル流

流速ベクトル場 $\boldsymbol{v} = (u, v)$.

- 渦なし $\quad \mathrm{rot}\, \boldsymbol{v} = \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0,$

$$\Rightarrow \quad \exists \Phi(x, y)\ \text{（速度ポテンシャル）} \quad \text{s.t.} \quad u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

- 非圧縮性 $\quad \mathrm{div}\, \boldsymbol{v} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0,$

$$\Rightarrow \quad \exists \Psi(x, y)\ \text{（流れ関数）} \quad \text{s.t.} \quad u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

(3/3) 代用電荷法の応用：二次元ポテンシャル流

流速ベクトル場 $\boldsymbol{v} = (u, v)$.

- 渦なし $\quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} = \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0,$

$$\Rightarrow \quad \exists\Phi(x,y)\,\text{（速度ポテンシャル）} \quad \text{s.t.} \quad u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

- 非圧縮性 $\quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0,$

$$\Rightarrow \quad \exists\Psi(x,y)\,\text{（流れ関数）} \quad \text{s.t.} \quad u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

(Φ, Ψ) に対する Cauchy-Riemann 関係式.

複素速度ポテンシャル

流れの領域 $\mathscr{D}$ における複素解析関数.

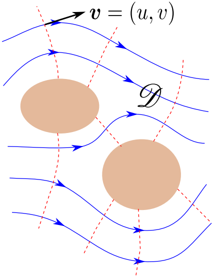
$$f(z) = \Phi(x,y) + \mathrm{i}\Psi(x,y) \quad (\, z = x + \mathrm{i}y \,).$$

$$\text{流速 } \boldsymbol{v} = (u,v) \quad \leftarrow \quad f'(z) = u - \mathrm{i}v. \tag{1}$$

(1) の理由.

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial\Psi}{\partial x} \\ &= \frac{\partial\Phi}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial\Phi}{\partial y} = u - \mathrm{i}v. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} = (u,v) &= \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) \\ &= \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}, -\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right). \end{aligned}$$

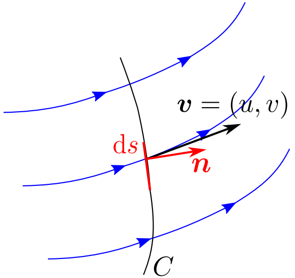


赤破線 $\Phi = \text{const.}$
青線 $\Psi = \text{const.}$

流れ関数 $\Psi = \operatorname{Im} f$ の意味.

$$\int_C \mathrm{d}\Psi = \int_C \frac{\partial \Psi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\mathrm{d}y$$
$$= \int_C u\mathrm{d}y - v\mathrm{d}x = \int_C \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s.$$

曲線 C を単位時間に横切る流量.
（$\boldsymbol{n}$；C の単位法線ベクトル）

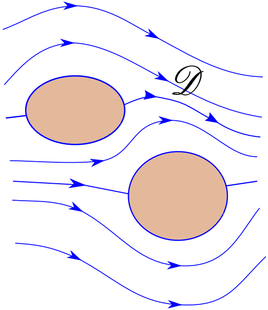


流れ関数の等高線 $\Psi = \operatorname{Im} f = \text{const.}\cdots$流線

(3/3) 代用電荷法の応用：二次元ポテンシャル流

複素速度ポテンシャル

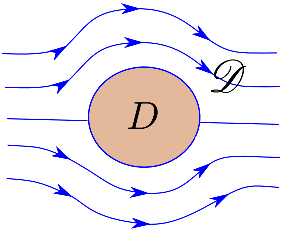
- 流れの領域 $\mathscr{D}$ における複素解析関数 $f(z)$.
- 流速 $\boldsymbol{v} = (u, v)$
$$f'(z) = u - \mathrm{i}v.$$
- 障害物の周に沿って $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{const.}$



(3/3) 代用電荷法の応用：二次元ポテンシャル流

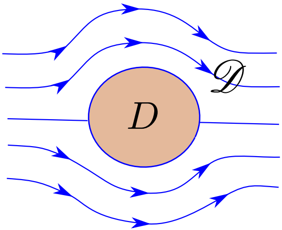
問題

ひとつの障害物 D をすぎるポテンシャル流で，遠方で一様流 $\boldsymbol{v} \sim (U, 0)$ となるものを求める．



問題

ひとつの障害物 D をすぎるポテンシャル流で，遠方で一様流 $\boldsymbol{v} \sim (U, 0)$ となるものを求める．



次を満たす複素速度ポテンシャル＝複素解析関数 $f(z)$ を求めればよい．

- $f(z)$ は流れの領域 $\mathscr{D}$ で解析関数である．
- $\operatorname{Im} f(z) = \text{const. on } \partial\mathscr{D}$.
- $f(z) \sim Uz$ as $z \to \infty$. *

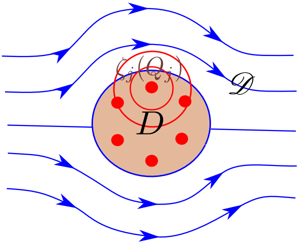
∗ 一様流 $\boldsymbol{v} = (U, 0)$ を与える複素速度ポテンシャルは $f(z) = Uz$.

代用電荷法による複素速度ポテンシャル近似

$$f(z) \simeq f_N(z) = Uz - \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\sum_{j=1}^{N} Q_j \log(z-\zeta_j),$$

$$\text{電荷 (unknown) } Q_1,\ldots,Q_N \in \mathbb{R}, \quad \sum_{j=1}^{N} Q_j = 0,$$

$$\text{電荷点 (given) } \quad \zeta_1,\ldots,\zeta_N \in D.$$

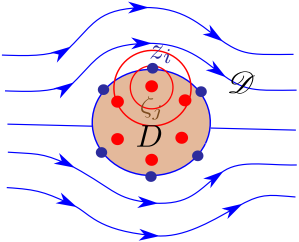


- $f_N(z)$ は流れの領域 $\mathscr{D}$ で解析関数である．
- $f_N(z)$ の与える流れは無限遠で一様流となる．

$$\therefore \quad f_N(z) \sim Uz - \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\underbrace{\sum_{j=1}^{N} Q_j}_{0} \log z = Uz \quad (\, z \to \infty \,).$$

(3/3) 代用電荷法の応用：二次元ポテンシャル流

$$f(z) \simeq f_N(z) = Uz - \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\sum_{j=1}^{N} Q_j \log(z - \zeta_j).$$



境界条件：$\operatorname{Im} f = \text{const. on } \partial\mathscr{D}$

$$\Downarrow$$

拘束条件

$$\operatorname{Im} f_N(z_i) = C \quad (\, i = 1, \dots, N\,),$$

拘束点 (given) $\quad z_1, \dots, z_N \in \partial D$,

C ： 未知実定数.

拘束条件 & $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} Q_j = 0 \quad \Rightarrow \quad$ 未知電荷 $Q_j(, C)$ を決定

$$f(z) \simeq f_N(z) = Uz - \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\sum_{j=1}^{N} Q_j \log(z - \zeta_j),$$

$$\text{拘束条件}\quad \operatorname{Im} f_N(z_i) = C \quad (\,i = 1, \ldots, N\,), \quad \sum_{j=1}^{N} Q_j = 0.$$

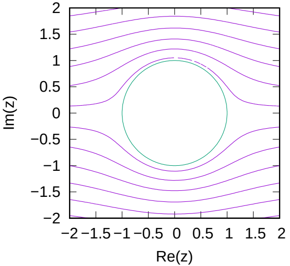
$$\text{拘束条件\&} \sum_{j=1}^{N} Q_j = 0 \quad \to \quad Q_j, C \text{ に対する連立一次方程式}$$

$$\begin{bmatrix} G_{11} & \cdots & G_{1N} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ G_{N1} & \cdots & G_{NN} & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_N \\ -C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -U(\operatorname{Im} z_1) \\ \vdots \\ -U(\operatorname{Im} z_N) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$G_{ij} = -\frac{1}{2\pi}\log|z_i - \zeta_j|, \quad 1 \le i, j \le N.$$

この連立一次方程式を解いて未知電荷 $Q_j(, C)$ を得る.

円柱 $|z| < r$ を過ぎる一様流．



$$\text{拘束点}\quad z_i = r\omega^{i-1} \quad (\,i = 1, \ldots, N\,)$$

$$\text{電荷点}\quad \zeta_j = qr\omega^{j-1} \quad (\,j = 1, \ldots, N\,),$$

$$\omega = \exp\left(\frac{2\pi\mathrm{i}}{N}\right), \quad 0 < q < 1.$$

この数値例では，$N = 32$，$q = 0.4$ ととった．

誤差の目安（境界条件に対する誤差）．

$$\epsilon_N := \max_{|z|=r} \left| \operatorname{Im} f_N(z) - C \right| = 8.6 \times 10^{-14}.$$

複数の障害物 $D_1, \ldots, D_L$ を過ぎる流れ

複素速度ポテンシャル

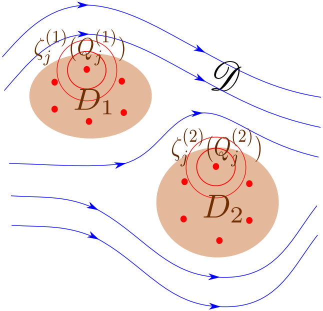
$$f(z) \simeq f_{\boldsymbol{N}}(z) = Uz - \frac{\mathrm{i}}{2\pi} \sum_{l=1}^{L} \sum_{j=1}^{N_l} Q_j^{(l)} \log(z - \zeta_j^{(l)}), \quad \boldsymbol{N} = (N_1, \ldots, N_L).$$

各障害物 $D_1, \ldots, D_L$ 内に電荷を置く.

$$Q_1^{(l)}, \ldots, Q_{N_l}^{(l)} \in \mathbb{R}, \quad \sum_{j=1}^{N_l} Q_j^{(l)} = 0,$$

$$\zeta_1^{(l)}, \ldots, \zeta_{N_l}^{(l)} \in D_l,$$

$$l = 1, \ldots, L.$$

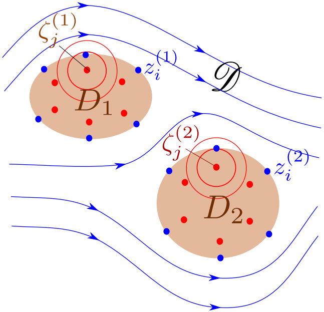


$$f(z) \simeq f_{\boldsymbol{N}}(z) = Uz - \frac{\mathrm{i}}{2\pi} \sum_{l=1}^{L} \sum_{j=1}^{N_l} Q_j^{(l)} \log(z - \zeta_j^{(l)}),$$

境界条件　$\operatorname{Im} f(z) = \text{const.} \quad \text{on } \partial D_l,$

$l = 1, \ldots, L.$

$\Downarrow$



拘束条件

$$\operatorname{Im} f_{\boldsymbol{N}}(z_i^{(l)}) = C_l \quad (\, i = 1, \ldots, N_l \,),$$

$$z_1^{(l)}, \ldots, z_{N_l}^{(l)} \in \partial D_l,$$

C_l ： 未知実定数,　$l = 1, \ldots, L.$

拘束条件 & $\sum_{j=1}^{N_l} Q_j^{(l)} = 0 \ (\, l = 1, \ldots, L \,) \quad \rightarrow \quad Q_j^{(l)}(, C_l)$ を決定.

楕円柱と円柱を過ぎるポテンシャル流.

$$D_1 = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z + \mathrm{i}r| < r \,\},$$

$$D_2 = \left\{ x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \;\middle|\; \frac{x^2}{A^2} + \frac{(y-r)^2}{B^2} < 1 \right\},$$

$$A = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{r^2}{\rho}\right), \quad B = \frac{1}{2}\left(\rho - \frac{r^2}{\rho}\right), \quad \rho = 2r.$$

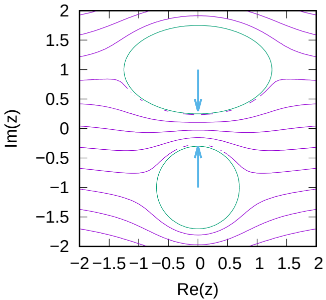
代用電荷法の拘束点 $z_i^{(l)}$，電荷点 $\zeta_i^{(l)}$ ($\omega = \exp(2\pi\mathrm{i}/N_1)$).

$$z_i^{(1)} = r\omega^{i-1} - \mathrm{i}r, \quad \zeta_i^{(1)} = q_1 r\omega^{i-1} - \mathrm{i}r \quad (\, i = 1, \ldots, N_1,\ 0 < q_1 < 1\,),$$

$$\left.\begin{aligned} z_i^{(2)} &= A\cos\left(\frac{2\pi(i-1)}{N_2}\right) + \mathrm{i}B\sin\left(\frac{2\pi(i-1)}{N_2}\right) + \mathrm{i}r, \\ \zeta_i^{(2)} &= A_q\cos\left(\frac{2\pi(i-1)}{N_2}\right) + \mathrm{i}B_q\sin\left(\frac{2\pi(i-1)}{N_2}\right) + \mathrm{i}r, \end{aligned}\right\} \quad (\, i = 1, \ldots, N_2\,),$$

$$A_q = \frac{1}{2}\left(q_2\rho + \frac{r^2}{q_2\rho}\right), \quad B_q = \frac{1}{2}\left(q_2\rho - \frac{r^2}{q_2\rho}\right), \quad \rho^{-1} < q_2 < 1.$$

$*$ 数値実験では，$N_1 = N_2 = 64$, $q_1 = 0.4$, $q_2 = 0.6$ ととった.



ポテンシャル流の流線，および，
楕円柱・円柱に働く力．
柱に働く力は Blasius の公式を
用いて算出した．

流れの中に 2 物体を置くと，2 物体間に引力が働く．

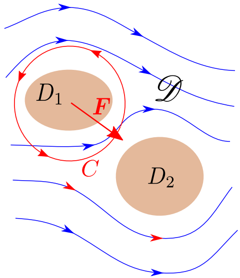
Blasius の公式

物体 D_1 に働く力 $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y)$.

$$F_x - \mathrm{i}F_y = \frac{\mathrm{i}}{2}\rho_\mathrm{m} \oint_C \{f'(z)\}^2 \mathrm{d}z$$

(ρ_m : 流体の質量密度).

* 導出は「補遺」



代用電荷法による近似複素速度ポテンシャルを代入して,

$$F_x - \mathrm{i}F_y \simeq \frac{\rho}{2\pi} \sum_{l=2}^{L} \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{k=1}^{N_l} \frac{Q_j^{(1)} Q_k^{(l)}}{\zeta_j^{(1)} - \zeta_k^{(l)}}.$$

H. Ogata, D. Okano & K. Amano: Computations of the forces on obstacles in two-dimensional potential flows by the charge simulation method, Information **4** (2002) 307–318.

まとめ

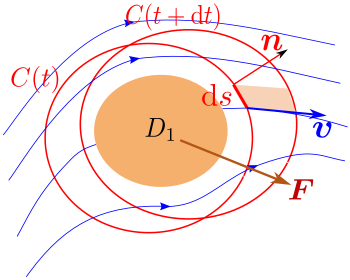
- 代用電荷法：ポテンシャル問題の数値解法
    - 点電荷ポテンシャルの重ね合わせで解を近似.
    - 計算（プログラミング）が簡単，計算量は少ない.
    - ある条件下で高精度を達成.
- 代用電荷法による複素解析関数の近似.

  複素対数ポテンシャルの重ね合わせで関数近似.
- 二次元ポテンシャル流問題への応用.
    - 複素速度ポテンシャル：複素解析関数で流れが記述される.
    - 代用電荷法による複素速度ポテンシャルの近似.
    - 流れの中の物体に働く力（Blasius の公式）.

補遺：Blasius の公式の証明

∗ 今井功：複素解析と流体力学，日本評論社 (1989).

時刻 t における流体中の（物体 D_1 を囲む）閉曲線 $C(t)$ が，微小時間後の時刻 $t+\mathrm{d}t$ には $C(t+\mathrm{d}t)$ になったとする．曲線に囲まれた流体の運動量の微小時間 $\mathrm{d}t$ における変化を二通りに表す．



- 微小線素 $\mathrm{d}s$ を時間 $\mathrm{d}t$ に通り過ぎる運動量は

$$\rho_{\mathrm{m}}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}s\mathrm{d}t=\rho_{\mathrm{m}}\boldsymbol{v}\mathrm{d}\Psi\mathrm{d}t$$

  であるから，

$$\oint_C \rho_{\mathrm{m}}\boldsymbol{v}\mathrm{d}\Psi\cdot\mathrm{d}t.$$

- Newton の運動方程式より，時間 $\mathrm{d}t$ における運動量の変化は（流体が受ける外力）$\times\mathrm{d}t$ に等しい．作用・反作用の法則により流体は物体 D_1 から力 $-\boldsymbol{F}$ を受ける．それと，流体の圧力 p を考慮して，

$$-\boldsymbol{F}\mathrm{d}t-\oint_C p\boldsymbol{n}\mathrm{d}s\cdot\mathrm{d}t.$$

補遺：Blasius の公式の証明

$$\oint_C \rho_\mathrm{m} \boldsymbol{v} \mathrm{d}\Psi = -\boldsymbol{F} - \oint_C p\boldsymbol{n} \mathrm{d}s, \quad \boldsymbol{F} = -\oint_C \rho_\mathrm{m} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}s - \oint_c p\boldsymbol{n}\mathrm{d}s,$$

$$F_x - \mathrm{i}F_y = -\oint_C \rho_\mathrm{m} w \mathrm{d}\Psi - \mathrm{i}\oint_C p\mathrm{d}\overline{z} \quad (\ w = u - \mathrm{i}v\ ).$$

ここで，

$$\mathrm{d}\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial z}\mathrm{d}z + \frac{\partial \Psi}{\partial \overline{z}}\mathrm{d}\overline{z},$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) = -\frac{\mathrm{i}}{2}(u - \mathrm{i}v) = -\frac{\mathrm{i}}{2}w, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \overline{z}} = \frac{i}{2}\overline{w}$$

であるから，

$$F_x - \mathrm{i}F_y = \frac{i}{2}\rho_\mathrm{m}\oint_C w^2 \mathrm{d}z - \mathrm{i}\oint_C \left(\frac{1}{2}\rho_\mathrm{m}|w|^2 + p\right)\mathrm{d}\overline{z}.$$

ここで，Bernoulli の定理より $\frac{1}{2}\rho_\mathrm{m}|w|^2 + p = \mathrm{const.}$ であるから右辺第 2 項の周回積分が消えて，Blasius の公式を得る． ■